

Material autorizado. Exclusivamente, un libro, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan.

Entregue esta hoja al terminar el examen.

1. Aplique el método de eliminación de Gauss para hallar la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 4 & -4 \\ 3 & -11 & 14 & -14 \\ 5 & -17 & 38 & -42 \end{pmatrix}$$

El cálculo debe hacerse en tres etapas, al final de cada cual el resultado deberá recogerse en una sola matriz 4×4 . Al final hay que obtener las matrices L y U . No aplique pivoteo, ni escalamiento.

2. Obtenga una estimación de la integral $\int_1^2 (1+x^2)^5 dx$ mediante las fórmulas de Gauss-Legendre de seis puntos.

3. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable, $a \in \mathbb{R}$ y δ la función definida mediante $\delta(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ para $h > 0$.

a) Escriba, en la forma de Lagrange, el polinomio de interpolación $P_3(x)$ de la función f por los puntos $x_0 = a - 2h, x_1 = a - h, x_2 = a + h, x_3 = a + 2h$. Simplifique la expresión.

b) Calcule la derivada $P'_3(a)$ y exprésela en función de δ .

c) ¿Qué método se obtiene al estimar $f'(a)$ mediante $P'_3(a)$?

4. Denotemos por $F_k(u)$, en donde $u \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, 10$, a la solución aproximada obtenida mediante un método de Runge-Kutta, con tamaño de paso $h = 0.2$, para el problema de valores iniciales: $y'' + y' + y = \sqrt{x}; y(1) = 3; y'(1) = u$, esto es, $y(1 + kh) \approx F_k(u)$ para $k = 0, 1, \dots, 10$.

Aplique la estrategia del método del disparo, con valores $u = 5$ y $u = 7$, para hallar el valor aproximado de $y(1.8)$, en donde y es la solución del problema de valores de frontera $y'' + y' + y = \sqrt{x}; y(1) = 3; y(3) = 6$

Nota: se pide una expresión de la forma $y(1.8) \approx \dots$, cuyo miembro derecho debe aparecer en función de F . Razone la respuesta.