

1. Se sabe que cierta función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un único punto de máximo relativo x_0 en el intervalo $(1, 5)$. Se emplea la búsqueda de la sección dorada para hallar aproximadamente ese punto $x_0 \in (1, 5)$.

a) Determine la mínima cota superior del valor absoluto del error verdadero E_t que se comete al aproximar x_0 mediante n iteraciones del método. (5 puntos)

b) Determine el número de iteraciones n que se necesitan, como mínimo, para poder asegurar que $E_t < 10^{-15}$. (3 puntos)

c) ¿Cuántas veces se habrá evaluado la función f al cabo de esas n iteraciones?. (2 puntos)

Notas. Se supone que no hay errores de redondeo. Se considera que cada iteración termina al comparar $f(x_1)$ con $f(x_2)$.

Comentario. Antes de empezar a resolver el ejercicio, recordemos brevemente en qué consiste la búsqueda de la sección dorada. Comenzamos con un intervalo (x_l^0, x_u^0) que contiene al punto de máximo x_0 . Calculamos dos puntos interiores mediante $x_1 = x_l^0 + R(x_u^0 - x_l^0)$, $x_2 = x_u^0 - R(x_u^0 - x_l^0)$, en donde $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Comparamos $f(x_1)$ con $f(x_2)$:

- Si $f(x_1) \geq f(x_2)$, entonces x_1 es nuestra estimación provisional de x_0 y para continuar hacemos $x_l^1 = x_2, x_u^1 = x_u^0$;
- Si $f(x_1) < f(x_2)$ entonces x_2 sería nuestra estimación de x_0 y haríamos $x_l^1 = x_l^0, x_u^1 = x_1$.

Se vuelve a aplicar el mismo procedimiento al intervalo (x_l^1, x_u^1) y así sucesivamente $(x_l^2, x_u^2) \dots (x_l^n, x_u^n)$.

Solución a) Del razonamiento del texto-base (4 Ed., pág 365, líneas 11-23) se deduce que, al terminar la n -ésima iteración, se tiene $E_t \leq (1 - R) |x_u^{n-1} - x_l^{n-1}|$.

Por otra parte, en cada etapa la longitud del intervalo se reduce en un factor R (pág. 363, l. -5), de manera que

$$|x_u^{n-1} - x_l^{n-1}| = R |x_u^{n-2} - x_l^{n-2}| = R^2 |x_u^{n-3} - x_l^{n-3}| = \dots = R^{n-1} |x_u^0 - x_l^0|.$$

Así, $E_t \leq (1 - R)R^{n-1} |x_u^0 - x_l^0|$. Con los datos de nuestro problema, $x_l^0 = 1, x_u^0 = 5$, se tiene

$$E_t \leq 4(1 - R)R^{n-1}$$

b) Se pide determinar el menor valor de n que verifique $4(1 - R)R^{n-1} < 10^{-15}$. Tomando logaritmos decimales: $\log_{10}(4(1 - R)) + (n - 1)\log_{10} R < -15$. Teniendo en cuenta que $\log_{10} R$ es un número negativo, se despeja n , obteniéndose $n > 1 - \frac{15 + \log_{10}(4(1 - R))}{\log_{10} R} \approx 73.65542$, por lo que concluimos que el valor buscado es $n = 74$.

c) El motivo de elegir $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, en vez de cualquier otro número positivo menor que uno, es que al calcular en la n -ésima iteración los valores de x_1 de x_2 , encontramos que uno de los dos es el x_1 o el x_2 de la iteración anterior. Por lo tanto, en cada iteración se evalúa una sola vez la función f , excepto en la primera iteración, en la que se evalúa dos veces. En consecuencia, al cabo de n iteraciones se habrá evaluado $n + 1$ veces la función f .

2. Aplique el método de la falsa posición modificado para calcular la raíz positiva de la ecuación $x^6 + x = 1.2$. Comience con $x_l = 0, x_u = 1.2$ y termine cuando el error relativo aproximado porcentual ε_a sea menor que 0,0001%. Opere con cuatro cifras significativas. Tabule los resultados. Indique claramente cuál es la aproximación final de la raíz.

Solución. Recordemos cómo es el algoritmo del *método de la falsa posición modificado* (Texto-base 4 ed., pág. 135-136). En cada iteración se parte de los valores (x_l, f_l) , (x_u, f_u) . La raíz verdadera desconocida está comprendida, en cada etapa, entre x_l y x_u . Como el error pedido es menor del que se puede alcanzar con cuatro cifras significativas (no confundir con *cuatro decimales*), el criterio de paro es que x_r coincida con x_l o con x_u . De esta manera, nos evitamos tener que calcular los errores aproximados en cada etapa. Es recomendable poner la calculadora en modo científico con mantisa de cuatro dígitos. Se comienza con los valores de x_l y x_u proporcionados en el enunciado y con $f_l = f(x_l)$, $f_u = f(x_u)$.

- 1. Se calcula $x_r = x_u - \frac{(x_l - x_u)f_u}{f_l - f_u}$ y se almacena en la memoria. Si x_r coincide con x_l o con x_u , entonces hemos terminado, con $x = x_r$ como aproximación de la raíz.
- 2. Se calcula $f(x_r)$, con el valor almacenado de x_r . Si $f(x_r)$ tiene el mismo signo que f_l , el par $(x_r, f(x_r))$ reemplaza a (x_l, f_l) . Si no es así, reemplaza a (x_u, f_u) .
- 3. Si el extremo no reemplazado (x_l o x_u) tampoco se reemplazó en la iteración anterior, entonces el f_l o el f_u no reemplazado se sustituye por su mitad.
- 4. Se repite el procedimiento.

Hay que pasar directamente los resultados de la calculadora a una tabla como la siguiente:

x_l	f_l	x_u	f_u
0,0000	−1,200	1,200	2,986
0,3440	−0,8543	1,200	2,986
0,5344	−0,6423	1,200	1,493
0,7346	−0,3083	1,200	<u>0,7465</u>
0,7346	−0,3083	0,8706	0,1060
0,8358	−0,02331	0,8706	0,1060
0,8421	−0,001299	0,8706	0,05300
0,8421	−0,001299	0,8428	0,001183
0,8421	<u>−0,0006495</u>	0,8425	0,0001181
0,8424	−0,0002365	0,8425	0,0001181
		0,8425	

La aproximación obtenida para la raíz positiva de la ecuación es $x = 0,8425$.
Los valores en negrita son los calculados en cada etapa. Los valores subrayados son el resultado de dividir entre dos el dato que aparece justo encima.

3. A cada norma en $\mathbb{R}^2$ se le asocia una norma natural para las matrices 2×2 , definida por $\|A\| = \max_{\|\mathbf{u}\|=1} \|A\mathbf{u}\|$ (los elementos $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ se interpretan como matrices columna).

a) Demuestre que la norma natural asociada a la norma euclidiana de $\mathbb{R}^2$ es la norma espectral. (Recuerde que existe una base ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ formada por autovectores de la matriz $A^T A$. Comience demostrando que los vectores $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2$ son ortogonales; después, calcule $\|A\mathbf{v}_1\|^2$ y $\|A\mathbf{v}_2\|^2$ y aplique el teorema de Pitágoras).(5 puntos)

b) Calcule la norma espectral de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 1 & 0.4 \end{pmatrix}$. (5 puntos)

Solución. a) Decir que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base ortonormal de autovectores de la matriz $A^T A$ significa que: 1) $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ tienen norma uno, esto es, $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = 1$; 2) Los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ son ortogonales, es decir, $\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0$; 3) existen ciertos números λ_1, λ_2 (autovalores o valores propios) tales que $A^T A \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$.

Comprobemos que el producto escalar de los vectores $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2$ es cero: $(A\mathbf{v}_1)^T A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T A^T A \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0$.

Calculemos $\|A\mathbf{v}_i\|^2$: $\|A\mathbf{v}_i\|^2 = (A\mathbf{v}_i)^T (A\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i^T (A^T A \mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = \lambda_i$

Un vector unitario cualquiera se escribe como $\mathbf{u} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2$ con $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Como $A\mathbf{u} = x_1 A\mathbf{v}_1 + x_2 A\mathbf{v}_2$, siendo $x_1 A\mathbf{v}_1$ y $x_2 A\mathbf{v}_2$ vectores ortogonales, resulta que los vectores $A\mathbf{u}$, $x_1 A\mathbf{v}_1$ y $x_2 A\mathbf{v}_2$ forman un triángulo rectángulo (quizá degenerado). Por el teorema de Pitágoras: $\|A\mathbf{u}\|^2 = x_1^2 \|A\mathbf{v}_1\|^2 + x_2^2 \|A\mathbf{v}_2\|^2$. Por lo tanto, la norma natural de A viene dada por

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{u}\|=1} \|A\mathbf{u}\| = \max_{x_1^2 + x_2^2 = 1} \sqrt{x_1^2 \lambda_1 + x_2^2 \lambda_2} = \sqrt{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}} = \|A\|_2$$

En consecuencia, la norma naturalmente asociada a la euclidea es precisamente la espectral.

$$\text{b) } A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 1 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0.6 \\ 0.6 & 0.2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2.2\lambda + 0.4 \quad ; \quad \lambda^2 - 2.2\lambda + 0.4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1.8334617 \times 10^{-2} \text{ o } \lambda = 2.1816654.$$

En consecuencia, la norma espectral de A es $\|A\|_2 = \sqrt{2.1816654} = 1.4770462$.

4. Para aproximar la solución del problema de valores de frontera

$$y'' + y = 10\sqrt{x} ; y(2) = 25 ; y(4) = 30, \quad (1)$$

se aplica el método del disparo, resolviendo los correspondientes problemas de valores iniciales mediante el método de Euler con tamaño de paso 0.2. Los resultados parciales obtenidos para los problemas de valores iniciales son

$x =$	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4
$y(x) \approx$	25	25,00	24,57	23,73	22,53	21,02	19,28	17,39	15,45	13,55	11,79
$y'(x) \approx$	0	-2,172	-4,206	-6,022	-7,543	-8,702	-9,442	-9,720	-9,510	-8,805	-7,616
$x =$	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4
$y(x) \approx$	25	27,00	28,57	29,65	30,21	30,22	29,70	28,66	27,15	25,23	22,98
$y'(x) \approx$	10	7,828	5,394	2,778	0,073	-2,622	-5,202	-7,564	-9,608	-11,24	-12,39

Termine de resolver el problema (1) mediante el método del disparo, combinado con el de Euler con tamaño de paso 0.2. Presente los resultados en una tabla. Opere con cuatro cifras significativas. En particular, indique los valores aproximados obtenidos para $y(3)$, $y'(3)$, $y'(2)$ e $y(4)$, en donde y es la solución del problema (1).

Solución. El método del disparo consiste en resolver un problema de valores de frontera mediante tres problemas de valores iniciales. En los dos primeros se utilizan valores iniciales de y' arbitrarios (serían los disparos para *afinar la puntería*). Las soluciones obtenidas no tienen por qué verificar la condición en el extremo final (no podemos esperar dar en el blanco con los disparos de prueba). A partir de los resultados de esos dos primeros *disparos*, se corrige el valor inicial (el *alza* de cañón) y se efectúa el tercer *disparo* que consigue que el valor final, $y(4) = 30$ en nuestro caso, sea el requerido (ahora sí, se da en el blanco). Para abreviar los cálculos, en el enunciado de este ejercicio nos dan resueltos dos de los tres problemas de valores iniciales. Resolvamos ahora el problema:

La ecuación diferencial de enunciado es lineal, por lo tanto, la solución depende de forma afín de las condiciones iniciales. En consecuencia, podemos determinar el valor correcto de $y'(2)$ mediante interpolación o extrapolación lineal (es decir, mediante una proporción o *regla de tres*), sin necesidad de otros métodos numéricos. En el primer disparo tenemos $y'(2) = 0$, $y(4) = 11,79$, mientras que en el segundo $y'(2) = 10$, $y(4) = 22,98$. Como el valor de $y(4)$ requerido es $y(4) = 30$, determinamos el valor correcto de $y'(2)$ mediante

$$\frac{y'(2) - 0}{30 - 11,79} = \frac{10 - 0}{22,98 - 11,79} \Leftrightarrow y'(2) = 16,27$$

Ahora podemos aplicar el método de Euler al problema de valores iniciales $y'' + y = 10\sqrt{x} ; y(2) = 25 ; y'(2) = 16,27$. Como de costumbre, la ecuación lineal de segundo orden se transforma en el un sistema de primer orden introduciendo $z = y'$ como nueva variable : $(y', z') = (z, 10\sqrt{x} - y)$; $(y(2), z(2)) = (25, 16,27)$. El algoritmo del método de Euler con tamaño de paso 0,2 es

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + 0,2 z_k & z_{k+1} &= z_k + 0,2 (10\sqrt{x_k} - y_k) \\ y_0 &= 25 & z_0 &= 16,27 \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene la solución numérica del problema de valores de frontera

$x =$	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4
$y(x) =$	25	28,25	31,07	33,35	35,01	35,98	36,22	35,71	34,47	32,54	29,99
$y'(x) = z(x) =$	16,27	14,10	11,42	8,304	4,859	1,204	-2,528	-6,194	-9,648	-12,75	-15,36

Finalmente, observamos en esta última tabla que $y(3) = 35,98$, $y'(3) = 1,204$, $y'(2) = 16,27$ e $y(4) = 29,99$. La discrepancia entre el valor requerido de $y(4) = 30$ con el obtenido $y(4) = 29,99$ se debe a los errores de redondeo.