

Material autorizado. Exclusivamente, un libro, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan.

Entregue esta hoja al terminar el examen.

1. Se sabe que cierta función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un único punto de máximo relativo x_0 en el intervalo $(1, 5)$. Se emplea la búsqueda de la sección dorada para hallar aproximadamente ese punto $x_0 \in (1, 5)$.

a) Determine la mínima cota superior del valor absoluto del error verdadero E_t que se comete al aproximar x_0 mediante n iteraciones del método. (5 puntos)

b) Determine el número de iteraciones n que se necesitan, como mínimo, para poder asegurar que $E_t < 10^{-15}$. (3 puntos)

c) ¿Cuántas veces se habrá evaluado la función f al cabo de esas n iteraciones?. (2 puntos)

Notas. Se supone que no hay errores de redondeo. Se considera que cada iteración termina al comparar $f(x_1)$ con $f(x_2)$.

2. Aplique el método de la falsa posición modificado para calcular la raíz positiva de la ecuación $x^6 + x = 1.2$. Comience con $x_l = 0, x_u = 1.2$ y termine cuando el error relativo aproximado porcentual ε_a sea menor que 0,0001%. Opere con cuatro cifras significativas. Tabule los resultados. Indique claramente cuál es la aproximación final de la raíz.

3. A cada norma en $\mathbb{R}^2$ se le asocia una norma natural para las matrices 2×2 , definida por $\|A\| = \max_{\|u\|=1} \|A u\|$ (los elementos $u \in \mathbb{R}^2$ se interpretan como matrices columna).

a) Demuestre que la norma natural asociada a la norma euclidiana de $\mathbb{R}^2$ es la norma espectral. (Recuerde que existe una base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ formada por autovectores de la matriz $A^T A$. Comience demostrando que los vectores Av_1, Av_2 son ortogonales; después, calcule $\|Av_1\|^2$ y $\|Av_2\|^2$ y aplique el teorema de Pitágoras). (5 puntos)

b) Calcule la norma espectral de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 1 & 0.4 \end{pmatrix}$. (5 puntos)

4. Para aproximar la solución del problema de valores de frontera

$$y'' + y = 10\sqrt{x} ; y(2) = 25 ; y(4) = 30, \quad (1)$$

se aplica el método del disparo, resolviendo los correspondientes problemas de valores iniciales mediante el método de Euler con tamaño de paso 0.2. Los resultados parciales obtenidos para los problemas de valores iniciales son

$x =$	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4
$y(x) \approx$	25	25,00	24,57	23,73	22,53	21,02	19,28	17,39	15,45	13,55	11,79
$y'(x) \approx$	0	-2,172	-4,206	-6,022	-7,543	-8,702	-9,442	-9,720	-9,510	-8,805	-7,616
$x =$	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4
$y(x) \approx$	25	27,00	28,57	29,65	30,21	30,22	29,70	28,66	27,15	25,23	22,98
$y'(x) \approx$	10	7,828	5,394	2,778	0,073	-2,622	-5,202	-7,564	-9,608	-11,24	-12,39

Termine de resolver el problema (1) mediante el método del disparo, combinado con el de Euler con tamaño de paso 0.2. Presente los resultados en una tabla. Opere con cuatro cifras significativas. En particular, indique los valores aproximados obtenidos para $y(3), y'(3), y'(2)$ e $y(4)$, en donde y es la solución del problema (1).