

1. a) El resultado de un cálculo aproximado es $x \approx 999\,900$ con $|\varepsilon_t| \leq 1\%$, en donde ε_t representa el error relativo porcentual verdadero. ¿Cuánto vale, como máximo, el valor verdadero?, ¿y como mínimo?. Razone las respuestas (3 puntos)
- b) Determine la mejor acotación de $|\varepsilon_t|$ al evaluar la expresión $f(x, y) = (20y - 10x)^2 + 4$ para los valores $x \approx 10, y \approx 5$, aproximados en ambos casos con $|\varepsilon_t| \leq 1\%$. Comente la propagación del error. (7 puntos).

Solución. a) El error relativo porcentual verdadero se define por $\varepsilon_t = \frac{\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}} 100\% = \left(1 - \frac{\text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}}\right) 100\%$.

Por lo tanto, $x_0 = \text{valor verdadero} = \frac{\text{valor aproximado}}{100 - \varepsilon_t} 100$. En nuestro caso $990\,000 = \frac{999\,900}{100 + 1} 100 \leq x_0 \leq \frac{999\,900}{100 - 1} 100 = 1\,010\,000$. Así que el valor verdadero está comprendido entre 990 000 y 1 010 000.

b) Razonando como en a), observamos que los valores verdaderos x_0, y_0 están comprendidos respectivamente en los intervalos $\left[\frac{1000}{101}, \frac{1000}{99}\right]$ y $\left[\frac{500}{101}, \frac{500}{99}\right]$, por lo que los errores respectivos verificarán $|\Delta x| \leq \frac{\frac{1000}{99} - \frac{1000}{101}}{2} \simeq 0.1, |\Delta y| \leq \frac{\frac{500}{99} - \frac{500}{101}}{2} \simeq 0.05$

La serie de Taylor de la función proporciona la siguiente estimación del valor verdadero $f(10, 5)$

$$f(x_0, y_0) \simeq f(10, 5) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=10, y=5} (x - 10) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{x=10, y=5} (y - 5) + \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{x=10, y=5} (x - 10)^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]_{x=10, y=5} (x - 10)(y - 5) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{x=10, y=5} (y - 5)^2 \right)$$

en donde todas las derivadas parciales están evaluadas en el punto $(10, 5)$, de manera que

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=10, y=5} = [-400y + 200x]_{x=10, y=5} = 0 \quad ; \quad \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{x=10, y=5} = [800y - 400x]_{x=10, y=5} = 0 \quad ; \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{x=10, y=5} = 200 \quad ; \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]_{x=10, y=5} = -400 \quad ; \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{x=10, y=5} = 800$$

y así

$$f(x_0, y_0) = 4 + \frac{1}{2} (200(x_0 - 10)^2 - 800(x_0 - 10)(y_0 - 5) + 800(y_0 - 5)^2) \leq 4 + 100 |\Delta x|^2 + 400 |\Delta x| |\Delta y| + 400 |\Delta y|^2 \leq 4 + 100 (0.1)^2 + 400 (0.1) (0.05) + 400 (0.05)^2 = 8.$$

$$f(x_0, y_0) \geq 4 + 100 (0.1)^2 - 400 (0.1) (0.05) + 400 (0.05)^2 = 4$$

Por lo tanto, el valor verdadero $f(x_0, y_0)$ está comprendido entre 4 y 8. Finalmente, como $\varepsilon_t = \left(1 - \frac{4}{f(x_0, y_0)}\right) 100\%$, resulta que ε_t está comprendido entre $(1 - \frac{4}{4}) 100\% = 0\%$ y $(1 - \frac{4}{8}) 100\% = 50\%$, por lo que concluimos que $|\varepsilon_t| \leq 50\%$.

El error puede llegar a ser muy grande, a pesar de que las derivadas primeras se anulan en el punto $(10, 5)$. Obsérvese que estas derivadas alcanzan, sin embargo, valores altos dentro de los rangos de las variables x e y . Por lo tanto, lo importante es acotar el valor de las derivadas en el recinto que contiene a los valores de x e y .

La cota no se puede mejorar (de hecho es algo mayor, pero obtenemos 50% por el redondeo). Por ejemplo, supongamos que los valores verdaderos desconocidos son $x_0 = 10.101$, $y_0 = 4.9505$. Entonces

$$\left|\frac{x_0 - 10}{x_0}\right| 100\% = .999\,901\% < 1\% \quad ; \quad \left|\frac{y_0 - 5}{y_0}\right| 100\% = .999\,899\% < 1\% \quad ; \quad \left|\frac{f(x_0, y_0) - f(10, 5)}{f(x_0, y_0)}\right| 100\% = \left|\frac{8.0 - 4}{8.0}\right| 100\% = 50.0\%$$

Tiempo estimado. 1 minuto: despejar valor verdadero. 2 minutos: cálculo máximo y mínimo. 2 minutos: acotación de errores en las variables, 2 minutos: cálculo y evaluación de derivadas parciales. 2 minutos: construcción polinomio de Taylor. 2 minutos: acotación superior. 1 minuto: acotación inferior. Total 12 minutos.

2. Aplique el método de ascenso optimal de máxima inclinación para aproximar el valor máximo de la función $f(x, y) = \frac{1}{2(x-1)^2 + (y-3)^2 + 1}$, empezando en $x = 0, y = 1$. Realice dos iteraciones del método. La solución exacta es, en este caso, evidente; compárela con sus resultados aproximados.

Solución.

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{-2}{(2(x-1)^2 + (y-3)^2 + 1)^2} (2x-2, y-3) = \frac{-2}{(2(x-1)^2 + (y-3)^2 + 1)^2} w(x, y)$$

En donde $w(x, y) = (2x-2, y-3)$ es un campo con la misma dirección que el gradiente. Como $w(0, 1) = (-2, -2) = -2(1, 1)$, obtenemos una función unidimensional en la dirección del gradiente definiendo $g(h) = f(h, 1+h)$. Para hallar el máximo de esta función, derivamos e igualamos a cero

$$g'(h) = \nabla f(h, 1+h) \cdot (1, 1) = 0 \Leftrightarrow (2h-2, (1+h)-3) \cdot (1, 1) = 0 \Leftrightarrow 3h-4 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{4}{3}$$

La primera iteración concluye en el punto $x_1 = x_0 + h = 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}, y_1 = y_0 + h = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$. Repetimos el procedimiento

$$w\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = \left(2\left(\frac{4}{3}\right) - 2, \frac{7}{3} - 3\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(1, -1)$$

Y ahora una función unidimensional en la dirección del gradiente es $g(h) = f\left(\frac{4}{3} + h, \frac{7}{3} - h\right)$. De nuevo derivamos e igualamos a cero

$$g'(h) = \nabla f\left(\frac{4}{3} + h, \frac{7}{3} - h\right) \cdot (1, -1) = 0 \Leftrightarrow \left(2\left(\frac{4}{3} + h\right) - 2, \left(\frac{7}{3} - h\right) - 3\right) \cdot (1, -1) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} + 3h = 0 \Leftrightarrow h = -\frac{4}{9}$$

Llegamos así al tercer punto $x_2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \approx 0.8888889$, $y_2 = \frac{7}{3} + \frac{4}{9} = \frac{25}{9} \approx 2.7777778$, con lo que termina la segunda iteración.

Hemos obtenido la aproximación para el valor máximo $f\left(\frac{8}{9}, \frac{25}{9}\right) = \frac{1}{2\left(\frac{8}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{25}{9}-3\right)^2 + 1} = \frac{9^2}{6+9^2} = \frac{27}{29} \approx 0.93103448$.

Es evidente que el valor de $\frac{1}{2(x-1)^2 + (y-3)^2 + 1}$ es tanto mayor cuanto menor sea el denominador. El valor mínimo del denominador es 1 y se alcanza para $x = 1, y = 3$.

En consecuencia, el valor máximo verdadero es $f(1, 3) = 1$. Los errores relativos porcentuales para los tres valores son

$$\left| \frac{1 - \frac{8}{9}}{1} \right| 100\% \approx 11.1\% \quad ; \quad \left| \frac{3 - \frac{25}{9}}{3} \right| 100\% \approx 7.4\% \quad ; \quad \left| \frac{1 - \frac{27}{29}}{1} \right| 100\% \approx 6.9\%$$

Tiempo estimado. 2 minutos: cálculo del gradiente y simplificación. 1 minuto: cálculo vector w . 3 minutos: primer cálculo de h . 1 minuto: cálculo segundo punto. 2 minutos: cálculo vector w . 3 minutos: segundo cálculo de h . 2 minutos. cálculo punto final. 1 minuto cálculo valor máximo. 1 minuto escribir valores verdaderos. 3 minutos : cálculos de errores. TOTAL: 19 minutos

3. Calcule aproximadamente el valor de de la integral

$$\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_{-1}^3 (x+y+z)^3 dx dy dz$$

utilizando, en cada dimensión, la regla de Simpson 1/3 (aplicación simple).

Solución. Dividimos los intervalos correspondientes a cada dimensión en dos partes y evaluamos el integrando $f(x, y, z) = (x+y+z)^3$ en los nodos así obtenidos:

$$\begin{array}{cccccccccc} f(-1, 0, -1) = -8 & f(-1, 0, 0) = -1 & f(-1, 0, 1) = 0 & f(-1, 1, -1) = -1 & f(-1, 1, 0) = 0 & f(-1, 1, 1) = 1 & f(-1, 2, -1) = 0 & f(-1, 2, 0) = 1 & f(-1, 2, 1) = 8 \\ f(1, 0, -1) = 0 & f(1, 0, 0) = 1 & f(1, 0, 1) = 8 & f(1, 1, -1) = 1 & f(1, 1, 0) = 8 & f(1, 1, 1) = 27 & f(1, 2, -1) = 8 & f(1, 2, 0) = 27 & f(1, 2, 1) = 64 \\ f(3, 0, -1) = 8 & f(3, 0, 0) = 27 & f(3, 0, 1) = 64 & f(3, 1, -1) = 27 & f(3, 1, 0) = 64 & f(3, 1, 1) = 125 & f(3, 2, -1) = 64 & f(3, 2, 0) = 125 & f(3, 2, 1) = 216 \end{array}$$

Consideremos las funciones

$$g(y, z) = \int_{-1}^3 f(x, y, z) dx \quad ; \quad h(z) = \int_0^2 g(y, z) dy$$

Está claro que $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_{-1}^3 (x+y+z)^3 dx dy dz = \int_{-1}^1 h(z) dz$. Aplicamos la regla de Simpson 1/3 en cada dimensión

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 h(z) dz &\approx (1 - (-1)) \frac{h(-1) + 4h(0) + h(1)}{6} \\ h(z) = \int_0^2 g(y, z) dy &\approx (2 - 0) \frac{g(0, z) + 4g(1, z) + g(2, z)}{6} \\ g(y, z) = \int_{-1}^3 f(x, y, z) dx &\approx (3 - (-1)) \frac{f(-1, y, z) + 4f(1, y, z) + f(3, y, z)}{6} \end{aligned}$$

Operando se obtiene

$$\begin{aligned} g(0, -1) &\approx 0 \quad ; \quad g(0, 0) \approx 20 \quad ; \quad g(0, 1) \approx 64 \quad ; \quad g(1, -1) \approx 20 \quad ; \quad g(1, 0) \approx 64 \quad ; \quad g(1, 1) \approx 156 \quad ; \quad g(2, -1) \approx 64 \quad ; \quad g(2, 0) \approx 156 \quad ; \quad g(2, 1) \approx 320 \\ h(-1) &\approx (2 - 0) \frac{g(0, -1) + 4g(1, -1) + g(2, -1)}{6} \approx 48 \quad ; \quad h(0) \approx (2 - 0) \frac{g(0, 0) + 4g(1, 0) + g(2, 0)}{6} \approx 144 \quad ; \quad h(1) \approx (2 - 0) \frac{g(0, 1) + 4g(1, 1) + g(2, 1)}{6} \approx 336 \\ \int_{-1}^1 \int_0^2 \int_{-1}^3 (x+y+z)^3 dx dy dz &= \int_{-1}^1 h(z) dz \approx (1 - (-1)) \frac{h(-1) + 4h(0) + h(1)}{6} \approx (1 - (-1)) \frac{48 + 4(144) + 336}{6} = 320 \end{aligned}$$

Tiempo estimado. 2 minutos: evaluación de f en los nodos (4 segundos cada evaluación). 3 minutos: definir funciones h y g . 3 minutos: evaluaciones de g (20 segundos cada evaluación). 2 minutos: evaluaciones de h (40 segundos cada evaluación). 1 minuto: evaluación final. TOTAL. 11 minutos.

4. Utilice un método Runge-Kutta de tercer orden para resolver el sistema

$$\frac{du}{dx} = 24x - 2u - 4v$$

$$\frac{dv}{dx} = 9x^2 - u + v$$

$$u(0) = -1$$

$$v(0) = -1$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 0.6$ con un tamaño de paso $h = 0.2$.

Solución. Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales que puede escribirse en la forma $y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$, siempre que se tenga en cuenta que $y = (u, v)$ es una variable bidimensional, $y_0 = (-1, -1)$ y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la función vectorial $f(x, (u, v)) = (24x - 2u - 4v, 9x^2 - u + v)$.

Aplicamos el método $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$, en donde $h = 0.2$ es el tamaño de paso, $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$, $k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1h + 2k_2h)$.

Denotamos con un segundo subíndice a las componentes de los vectores k_1, k_2, k_3 , de manera que $k_j = (k_{j1}, k_{j2})$ para $j = 1, 2, 3$. Aplicamos el algoritmo y tabulamos los resultados como sigue

$$u_{i+1} = u_i + 0.2 \frac{k_{11} + 4k_{21} + k_{31}}{6} \quad v_{i+1} = v_i + 0.2 \frac{k_{12} + 4k_{22} + k_{32}}{6}$$

x_i	u_i	v_i	k_{11} $24x_i - 2u_i - 4v_i$	k_{12} $9x_i^2 - u_i + v_i$	$\overline{x_i}$ $x_i + 0.1$	$\overline{u_i}$ $u_i + 0.1k_{11}$	$\overline{v_i}$ $v_i + 0.1k_{12}$	k_{21} $24\overline{x_i} - 2\overline{u_i} - 4\overline{v_i}$	k_{22} $9\overline{x_i}^2 - \overline{u_i} + \overline{v_i}$	$\overline{\overline{x_i}}$ $x_i + 0.2$	$\overline{\overline{u_i}}$ $u_i - 0.2k_{11} + 0.4k_{21}$	$\overline{\overline{v_i}}$ $v_i - 0.2k_{12} + 0.4k_{22}$	k_{31} $24\overline{\overline{x_i}} - 2\overline{\overline{u_i}} - 4\overline{\overline{v_i}}$	k_{32} $9\overline{\overline{x_i}}^2 - \overline{\overline{u_i}} + \overline{\overline{v_i}}$
0, 0	-1, 00000	-1, 00000	6, 00000	0, 00000	0, 10000	-0, 40000	-1, 00000	7, 20000	-0, 51000	0, 20000	0, 68000	-1, 20400	8, 25600	-1, 52400
0, 2	0, 43520	-1, 11880	8, 40480	-1, 19400	0, 30000	1, 27568	-1, 23820	9, 60144	-1, 70388	0, 40000	2, 59482	-1, 56155	10, 65658	-2, 71637
0, 4	2, 35077	-1, 47633	10, 80378	-2, 38710	0, 50000	3, 43115	-1, 71504	11, 99786	-2, 89619	0, 60000	4, 98916	-2, 15738	13, 05122	-3, 90655
0, 6	4, 74565	-2, 07228												

En consecuencia, las aproximaciones halladas son

$$u(0.2) \approx 0, 435200$$

$$u(0.4) \approx 2, 350771$$

$$u(0.6) \approx 4, 745652$$

$$v(0.2) \approx -1, 118800$$

$$v(0.4) \approx -1, 476330$$

$$v(0.6) \approx -2, 072276$$

En este caso, se puede determinar la solución exacta del problema: $u(x) = 6x^2 + 6x - 1$, $v(x) = -1 - 3x^2$, de donde se obtiene

$$u(0.2) = 0.44$$

$$u(0.4) = 2.36$$

$$u(0.6) = 4.76$$

$$v(0.2) = -1.12$$

$$v(0.4) = -1.48$$

$$v(0.6) = -2.08$$

Tiempo estimado. 10 minutos: planteamiento de algoritmos y dibujo de la tabla. 25 minutos: completar la tabla (35 segundos para cada casilla). TOTAL: 30 minutos.

Tiempo estimado total del examen: 77 minutos.