



Código asignatura	Nombre asignatura
52401	MÉTODOS MATEMÁTICOS
Fecha alta y origen	Convocatoria
05/09/2007	FEBRERO 2007 – 1ª SEMANA
Curso Virtual	

1. Determine el periodo T de la función $f(t) = \cos^4 t$, así como todos los coeficientes a_k, b_k de su serie de Fourier $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$.

Notas: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Recuerde que $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

Solución.

$$\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \cos^2 2t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos 4t}{2} \right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t$$

En consecuencia, el periodo es $T = \pi$ y los coeficientes son

$$a_0 = \frac{3}{8} \quad ; \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{8} \quad ; \quad a_k = 0 \quad \text{en otro caso}$$
$$b_k = 0 \quad \text{para todo } k$$

Tiempo estimado. 3 minutos: expansión de $\cos^4 t$. 1 minuto: deducción del periodo y de los coeficientes. TOTAL 4 minutos.

2. Aplique el método de Bairstow para calcular aproximadamente todas las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 4$. Comience con los valores $r = 0, s = -1$ y aplique una sola iteración del método de Bairstow (es decir mejore una sola vez las estimaciones de r y s del enunciado).

Solución. En este caso tenemos $a_0 = 4, a_1 = -4, a_2 = 4, a_3 = -2, a_4 = 1$. Mediante división sintética entre $C_1(x) = x^2 - rx - s = x^2 + 1$ obtenemos el cociente $Q_1(x) = b_4x^2 + b_3x + b_2$ y el resto $R_1(x) = b_1(x - r) + b_0$ en donde

$$\begin{aligned}b_4 &= a_4 = 1 \\b_3 &= a_3 + rb_4 = -2 \\b_2 &= a_2 + rb_3 + sb_4 = 4 - 1 = 3 \\b_1 &= a_1 + rb_2 + sb_3 = -4 - (-2) = -2 \\b_0 &= a_0 + rb_1 + sb_2 = 4 - 3 = 1\end{aligned}$$

Por supuesto, las divisiones pueden hacerse aplicando el procedimiento general para la división de polinomios.

Para mejorar la estimación, se aproximan las derivadas parciales $c_1 = \partial b_0 / \partial r, c_2 = \partial b_1 / \partial r = \partial b_0 / \partial s, c_3 = \partial b_1 / \partial s$ mediante

$$\begin{aligned}c_3 &= b_3 + rb_4 = -2 \\c_2 &= b_2 + rc_3 + sb_4 = 3 - 1 = 2 \\c_1 &= b_1 + rc_2 + sc_3 = -2 - (-2) = 0\end{aligned}$$

Los incrementos $\Delta r, \Delta s$ se estiman como las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0 \\c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1\end{aligned}$$

En nuestro caso

$$\begin{aligned}2\Delta s &= -1 \\2\Delta r - 2\Delta s &= 2\end{aligned}$$

y se obtiene $\Delta s = -0.5, \Delta r = 0.5$. Los nuevos valores de r y s son $r = 0 + 0.5 = 0.5, s = -1 + (-0.5) = -1.5$.

Dividimos el polinomio $P(x)$ entre $C_2(x) = x^2 - rx - s = x^2 - 0.5x + 1.5$ (deflación) para obtener el cociente $Q_2(x) = b_4x^2 + b_3x + b_2$ en donde

$$\begin{aligned}b_4 &= a_4 = 1 \\b_3 &= a_3 + rb_4 = -2 + 0.5 = -1.5 \\b_2 &= a_2 + rb_3 + sb_4 = 1.75\end{aligned}$$

Las raíces de $C_2(x)$ son

$$x = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 6}}{2} = .25 \pm 1.198\,957\,9i$$

mientras que las de $Q_2(x)$ son

$$x = \frac{1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 4(1.75)}}{2} = .75 \pm 1.089\,724\,7i$$

Estas son las estimaciones de las cuatro raíces que obtenemos.

Nota. Las raíces exactas son $x = i\sqrt{2}, x = -i\sqrt{2}, x = 1 + i, x = 1 - i$. La escasa calidad de la aproximación se debe a que sólo hemos iterado una vez el método.

Tiempo estimado. 3 minutos: primera división. 1 minuto: planteamiento del sistema. 3 minutos: resolución del sistema. 1 minuto: nuevos valores de r y s . 3 minutos: segunda división. 4 minutos : cálculo de raíces. TOTAL 15 minutos.

3. Use la integración de Romberg para evaluar $\int_0^{12} \frac{10x-8}{1+x^2} dx$ con una precisión de orden h^8 . Calcule el error relativo porcentual aproximado ε_a en cada una de las tres iteraciones. Justifique los cálculos y presente los resultados finales en una tabla como la siguiente

$O(h^2)$	$O(h^4)$	ε_a	$O(h^6)$	ε_a	$O(h^8)$	ε_a
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____		_____			
_____	_____					

Nota. La primera columna corresponde a la regla del trapecio de aplicación múltiple.

Solución. Comenzamos aplicando la regla del trapecio en 1, 2, 4 y 8 subintervalos a la integral en $[0, 12]$ de la función $f(x) = \frac{10x-8}{1+x^2}$. Operamos con todas las cifras que proporcione la calculadora, aunque basta anotar los resultados parciales con siete u ocho cifras.

$$\begin{array}{llllll} f(0) = -8 & f(1.5) = 2.153\,846 & f(3) = 2.2 & f(4.5) = 1.741\,177 & & \\ f(6) = 1.405\,405 & f(7.5) = 1.170\,306 & f(9) = 1 & f(10.5) = 0.871\,9101 & f(12) = 0.772\,4138 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} I_{1,1} = 12 \frac{f(0) + f(12)}{2} \approx -43.365\,52 & I_{2,1} = 12 \frac{f(0) + 2f(6) + f(12)}{4} \approx -13.250\,33 \\ I_{3,1} = 12 \frac{f(0) + 2(f(3) + f(6) + f(9)) + f(12)}{8} = 2.974\,837 & I_{4,1} = 12 \frac{f(0) + 2(f(1.5) + f(3) + f(4.5) + f(6) + f(7.5) + f(9) + f(10.5)) + f(12)}{16} \approx 10.393\,28 \end{array}$$

Seguidamente aplicamos el algoritmo de Romberg, $I_{j,k} = \frac{4^{k-1}I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$, completando la tabla del enunciado

$O(h^2)$	$O(h^4)$	ε_a	$O(h^6)$	ε_a	$O(h^8)$	ε_a
$I_{1,1} = -43.365\,52$	$I_{1,2} = \frac{4}{3}I_{2,1} - \frac{1}{3}I_{1,1} = -\mathbf{3.211\,929}$	$\left \frac{I_{1,2} - I_{1,1}}{I_{1,2}} \right 100\% \approx 1250\%$	$I_{1,3} = \frac{16}{15}I_{2,2} - \frac{1}{15}I_{1,2} = \mathbf{9.156\,235}$	$\left \frac{I_{1,3} - I_{1,2}}{I_{1,3}} \right 100\% \approx 135\%$	$I_{1,4} = \frac{64}{63}I_{2,3} - \frac{1}{63}I_{1,3} = \mathbf{13.228\,58}$	$\left \frac{I_{1,4} - I_{1,3}}{I_{1,4}} \right 100\% \approx 30\%$
$I_{2,1} = -13.250\,33$	$I_{2,2} = \frac{4}{3}I_{3,1} - \frac{1}{3}I_{2,1} = \mathbf{8.383\,225}$	×	$I_{2,3} = \frac{16}{15}I_{3,2} - \frac{1}{15}I_{2,2} = \mathbf{13.164\,95}$	×	×	×
$I_{3,1} = 2.974\,837$	$I_{3,2} = \frac{4}{3}I_{4,1} - \frac{1}{3}I_{3,1} = \mathbf{12.866\,09}$	×	×	×	×	×
$I_{4,1} = 10.393\,28$	×	×	×	×	×	×

Se observa que los errores relativos aproximados son grandes. Esto muestra que la elección de un método de orden 8 no garantiza un buen resultado, si el incremento de paso no es lo suficientemente pequeño. Sin embargo, es interesante observar que para obtener una precisión similar, mediante la regla del trapecio de aplicación múltiple, necesitaríamos 23 subintervalos. La integral se puede calcular por cuadraturas, obteniéndose $\int_0^{12} \frac{10x-8}{1+x^2} dx = 5 \ln 5 + 5 \ln 29 - 8 \arctan 12 \approx 12.982\,428$.

Tiempo estimado. 1 minuto: determinación de los nodos. 3 minutos: evaluación de f en los nodos (20 segundos por evaluación). 6 minutos evaluación primera columna. 4 minutos: segunda columna. 3 minutos: tercera columna, 2 minutos cuarta columna. 3 minutos: estimación errores. TOTAL 22 minutos.

4. Utilice el método de Euler para resolver de forma aproximada el problema

$$y'' + y + 2 \cos t = 1 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = 0$$

desde $t = 0$ hasta $t = 0.25$ con un tamaño de paso $h = 0.05$. Presente los resultados en una tabla. Opere, al menos, con ocho decimales. ¿Cuánto estima que vale $y'(0.15)$?

Solución. La ecuación lineal de segundo orden se puede transformar en un sistema de primer orden introduciendo la nueva variable $z = y'$ de manera que se obtiene

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= 1 - y - 2 \cos t \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

Si escribimos en forma *vectorial* el sistema, resulta

$$\begin{aligned} w' &= f(t, w) \\ w(0) &= (1, 0) \end{aligned}$$

en donde $w = (y, z)$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la función, $f(t, w) = (z, 1 - y - 2 \cos t)$. El algoritmo del método de Euler es

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= w_k + f(t_k, w_k)h \\ w_0 &= (1, 0) \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + 0.05 z_k & z_{k+1} &= z_k + 0.05 (1 - y_k - 2 \cos t_k) \\ y_0 &= 1 & z_0 &= 0 \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene

t_k	y_k	z_k
0.00000000	1.00000000	0.00000000
0.05000000	1.00000000	-0.10000000
0.10000000	0.99500000	-0.19987503
0.15000000	0.98500625	-0.29912544
0.20000000	0.97004998	-0.39725286
0.25000000	0.95018733	-0.49376202

La columna rotulada como z_k nos proporciona las estimaciones de la derivada y' de y . Por lo tanto, $y'(0.15) \approx z_3 = -0.29912544$.

Nota. La solución exacta del problema es $y(t) = 1 - t \sin t$, de manera que, por ejemplo, $y(0.25) = 0.93814901$ mientras que $y'(0.15) = -0.29775379$.