

Material autorizado. Exclusivamente, un libro, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan. El examen se calificará con un **cero** si el alumno utiliza cualquier material que no esté expresamente autorizado o se comunica o intercambia material con otros o es sorprendido con cualquier equipo de comunicación o almacenamiento de información en disposición de ser empleado, lo haya o no utilizado.

Entregue esta hoja al terminar el examen.

1. Determine el periodo T de la función $f(t) = \cos^4 t$, así como todos los coeficientes a_k, b_k de su serie de Fourier $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$.

Notas: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Recuerde que $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

2. Aplique el método de Bairstow para calcular aproximadamente todas las raíces del polinomio

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 4.$$

Comience con los valores $r = 0, s = -1$ y aplique una sola iteración del método de Bairstow (es decir mejore una sola vez las estimaciones de r y s del enunciado).

3. Use la integración de Romberg para evaluar $\int_0^{12} \frac{10x - 8}{1 + x^2} dx$ con una precisión de orden h^8 . Calcule el error relativo porcentual aproximado ε_a en cada una de las tres iteraciones. Justifique los cálculos y presente los resultados finales en una tabla como la siguiente

$O(h^2)$	$O(h^4)$	ε_a	$O(h^6)$	ε_a	$O(h^8)$	ε_a

Nota. La primera columna corresponde a la regla del trapecio de aplicación múltiple.

4. Utilice el método de Euler para resolver de forma aproximada el problema

$$y'' + y + 2 \cos t = 1 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = 0$$

desde $t = 0$ hasta $t = 0.25$ con un tamaño de paso $h = 0.05$. Presente los resultados en una tabla. Opere, al menos, con ocho decimales. ¿Cuánto estima que vale $y'(0.15)$?