

Material autorizado. Exclusivamente, un libro, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan. El examen se calificará con un **cero** si el alumno utiliza cualquier material que no esté expresamente autorizado o se comunica o intercambia material con otros o es sorprendido con cualquier equipo de comunicación o almacenamiento de información en disposición de ser empleado, lo haya o no utilizado.

Entregue esta hoja al terminar el examen.

1. a) El resultado de un cálculo aproximado es $x \approx 999\,900$ con $|\varepsilon_t| \leq 1\%$, en donde ε_t representa el error relativo porcentual verdadero. ¿Cuánto vale, como máximo, el valor verdadero?, ¿y como mínimo?. Razone las respuestas (3 puntos)
 b) Determine la mejor acotación de $|\varepsilon_t|$ al evaluar la expresión $f(x, y) = (20y - 10x)^2 + 4$ para los valores $x \approx 10, y \approx 5$, aproximados en ambos casos con $|\varepsilon_t| \leq 1\%$. Comente la propagación del error. (7 puntos).

2. Aplique el método de ascenso optimal de máxima inclinación para aproximar el valor máximo de la función $f(x, y) = \frac{1}{2(x-1)^2 + (y-3)^2 + 1}$, empezando en $x = 0, y = 1$. Realice dos iteraciones del método.

La solución exacta es, en este caso, evidente; compárela con sus resultados aproximados.

3. Use la integración de Romberg para evaluar $\int_0^{12} \frac{10x-8}{1+x^2} dx$ con una precisión de orden h^8 . Calcule el error relativo porcentual aproximado ε_a en cada una de las tres iteraciones. Justifique los cálculos y presente los resultados finales en una tabla como la siguiente

$O(h^2)$	$O(h^4)$	ε_a	$O(h^6)$	ε_a	$O(h^8)$	ε_a
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
_____	_____		_____			
_____	_____					
_____	_____					

Nota. La primera columna corresponde a la regla del trapecio de aplicación múltiple.

4. Utilice un método Runge-Kutta de tercer orden para resolver el sistema

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dx} &= 24x - 2u - 4v \\
 \frac{dv}{dx} &= 9x^2 - u + v \\
 u(0) &= -1 \\
 v(0) &= -1
 \end{aligned}$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 0.6$ con un tamaño de paso $h = 0.2$.