

1. a) Aplique el método de Newton-Raphson para deducir una algoritmo que permita aproximar la raíz cúbica del número real positivo a a partir de una *semilla* x_0 . (3 puntos)
 b) Supongamos que $0 < x_0 < \sqrt[3]{a}$. Aplique el binomio de Newton (cubo de una suma) para demostrar que el error $E_n = \sqrt[3]{a} - x_n$ cometido en la n -ésima aproximación positiva

x_n del algoritmo del apartado a) verifica $|E_n| < \frac{|x_n^3 - a|}{3x_0x_n}$. (4 puntos)

c) Aplique el algoritmo del apartado a) para aproximar, con seis cifras decimales exactas, la raíz cúbica de $a = 235600$, partiendo de $x_0 = 50$. (3 puntos)

Notas. Para que el resultado sea válido, el algoritmo se tiene que poder expresar utilizando sólo operaciones aritméticas (sumas, restas multiplicaciones y divisiones) y debe deducirse por el procedimiento indicado. En este ejercicio no está permitido calcular raíces con la calculadora, por lo que el criterio de paro en el apartado c) debe establecerse necesariamente mediante la expresión del apartado b) .

Solución. a) La raíz cúbica de a es la raíz de la función $f(x) = x^3 - a$. El método de Newton-Raphson nos proporciona el algoritmo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En nuestro caso: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2}$ y simplificando

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + \frac{a}{x_n^2}}{3}$$

b)

$$\begin{aligned} |x_n^3 - a| &= |(\sqrt[3]{a} - E_n)^3 - a| = \left| -E_n^3 + 3E_n^2\sqrt[3]{a} - 3E_n(\sqrt[3]{a})^2 \right| = |E_n| (3\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a} - E_n) + E_n^2) = \\ &= |E_n| (3\sqrt[3]{a}x_n + E_n^2) \geq 3\sqrt[3]{a}x_n |E_n| \geq 3x_0x_n |E_n| \end{aligned}$$

luego $|E_n| \leq \frac{|x_n^3 - a|}{3x_0x_n}$.

c) Aplicamos el algoritmo del apartado a), utilizando como criterio de paro la expresión del apartado b), para conseguir que $|E_n| < 10^{-7}$.

n	x_n	cota de E_n
0	50.0000000000	1.47×10^1
1	64.7466666667	3.69×10^0
2	61.8979564095	1.67×10^{-1}
3	61.7628285643	3.66×10^{-4}
4	61.7625324935	1.75×10^{-9}

Concluimos que $\sqrt[3]{235600} \simeq 61.762532$.

2. Emplee el método de Gauss-Seidel con sobrerrelajación ($\lambda = 1.1$), aplicando el criterio de paro que aparece a la derecha, para resolver el sistema de la izquierda, comenzando con $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$

$$\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 60 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 18 \end{aligned} \quad \varepsilon_a^{ij} = \left| \frac{\widetilde{x}_i^j - \widetilde{x}_i^{j-1}}{\widetilde{x}_i^j} \right| \leq 0.05 \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

Notas. x_i^j es la j -ésima aproximación para x_i , mientras que $\widetilde{x}_i^j$ es el valor modificado de x_i^j por efecto de la relajación. No reordene filas ni columnas. El resultado debe presentarse en una tabla como la siguiente

j	x_1^j	$\widetilde{x}_1^j$	ε_a^{1j}	x_2^j	$\widetilde{x}_2^j$	ε_a^{2j}	x_3^j	$\widetilde{x}_3^j$	ε_a^{3j}
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..

Solución. El de Gauss-Seidel es un método iterativo (similar al del punto fijo), solo que, en cada iteración, en vez de utilizar la aproximación anterior completa, (x_1^j, x_2^j, x_3^j) , se utiliza el último valor hallado para cada variable; es decir, para calcular x_2^{j+1} se emplea $(x_1^{j+1}, x_2^j, x_3^j)$, ..., etc.

La sobrerrelajación es una técnica para acelerar la convergencia del método, consistente en reemplazar en los cálculos x_i^j por una combinación lineal de x_i^j con la mejor aproximación de la variable en la anterior estimación, en nuestro caso, por $\widetilde{x}_i^j = \lambda x_i^j + (1 - \lambda)\widetilde{x}_i^{j-1}$.

En la tabla siguiente se reflejan las expresiones utilizadas y los resultados correspondientes. Aparecen en negrita los valores de ε_a^{ij} menores que 0.05. En la etapa $j = 0$ se considera $\widetilde{x}_i^0 = x_i^0 = 0$.

j	x_1^j	$\widetilde{x}_1^j$	ε_a^{1j}	x_2^j	$\widetilde{x}_2^j$	ε_a^{2j}	x_3^j	$\widetilde{x}_3^j$	ε_a^{3j}
j	$\frac{12 - 6\widetilde{x}_2^{j-1} - 2\widetilde{x}_3^{j-1}}{9}$	$1.1x_1^j - 0.1\widetilde{x}_1^{j-1}$	$\left \frac{\widetilde{x}_1^j - \widetilde{x}_1^{j-1}}{\widetilde{x}_1^j} \right $	$\frac{60 - 3\widetilde{x}_1^j - \widetilde{x}_3^{j-1}}{5}$	$1.1x_2^j - 0.1\widetilde{x}_2^{j-1}$	$\left \frac{\widetilde{x}_2^j - \widetilde{x}_2^{j-1}}{\widetilde{x}_2^j} \right $	$\frac{18 - 4\widetilde{x}_1^j - 3\widetilde{x}_2^j}{8}$	$1.1x_3^j - 0.1\widetilde{x}_3^{j-1}$	$\left \frac{\widetilde{x}_3^j - \widetilde{x}_3^{j-1}}{\widetilde{x}_3^j} \right $
0	0	0	—	0	0	—	0	0	—
1	1.33333333	1.46666667	1	11.12	12.232	1	-3.07033333	-3.37736667	1
2	-6.07080741	-6.82455481	1.21491023	16.7702062	17.2240268	0.28982925	-0.79673266	-0.53866926	5.26983369
3	-10.0296469	-10.3501562	0.34063267	18.3178275	18.4272076	0.06529371	0.51487522	0.62022967	1.86849966
4	-11.0893006	-11.163215	0.07283375	18.5738831	18.5885506	0.0086797	0.86090102	0.88496816	0.29915029
5	-11.2556933	-11.2649412	0.00903033	18.5819711	18.5813131	0.0003895	0.91447816	0.91742917	0.03538258

Las aproximaciones obtenidas son $x_1 \approx -11,2649412$, $x_2 \approx 18,5813131$, $x_3 \approx 0,91742917$.

Aunque no se pide, es interesante comparar los resultados con las soluciones *exactas* $x_1 = -\frac{2148}{191} \approx -11.2461$, $x_2 = \frac{3546}{191} \approx 18.5655$, $x_3 = \frac{174}{191} \approx 0.910995$, por lo que los errores verdaderos relativos son respectivamente $|\varepsilon_{t,1}| \approx 1.67245 \times 10^{-3}$, $|\varepsilon_{t,2}| \approx 8.54275 \times 10^{-4}$, $|\varepsilon_{t,3}| \approx 7.06305 \times 10^{-3}$.

3. Determine la serie de Fourier completa para la forma de onda de periodo $T = 1$ que verifica $f(t) = 2|t|$ para $t \in [-1/2, 1/2]$. Construya los espectros de amplitud y de fase.

Solución. Observemos primero que f es una función par, por lo que la serie de Fourier $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2k\pi t) + b_k \sin(2k\pi t)]$ se expresará con cosenos únicamente (esto es, $b_k = 0$ para todo k). Calculemos los coeficientes:

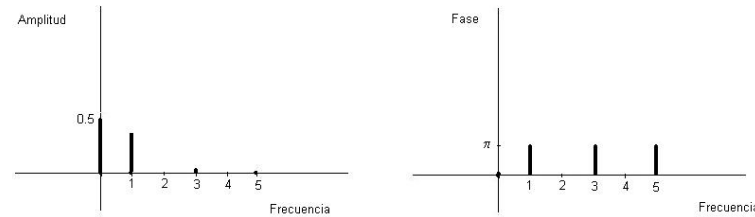
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^{1/2} 2|t| dt + \int_{1/2}^1 2|t-1| dt = \int_0^{1/2} 2t dt + \int_{1/2}^1 2(1-t) dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^1 f(t) \cos(2k\pi t) dt = 2 \int_0^{1/2} 2t \cos(2k\pi t) dt + 2 \int_{1/2}^1 2(1-t) \cos(2k\pi t) dt = \frac{\cos k\pi - 1}{k^2 \pi^2} + \frac{\cos k\pi - 1}{k^2 \pi^2} = \frac{2((-1)^k - 1)}{k^2 \pi^2}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^1 f(t) \sin(2k\pi t) dt = 2 \int_0^{1/2} 2t \sin(2k\pi t) dt + 2 \int_{1/2}^1 2(1-t) \sin(2k\pi t) dt = -\frac{k\pi \cos k\pi}{k^2 \pi^2} + \frac{k\pi \cos k\pi}{k^2 \pi^2} = 0$$

Por lo tanto, $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2((-1)^k - 1)}{k^2 \pi^2} \cos(2k\pi t) \right]$.

El espectro de amplitud vendrá dado por $c_0 = \frac{1}{2}$; $c_k = \frac{4}{\pi^2 k^2}$ si k es impar, $c_k = 0$ si $k > 0$ es par, mientras que el espectro de fases será $\phi_k = \pi$, si k es impar, $\phi_k = 0$ en otro caso. En consecuencia, los diagramas de amplitud y fase quedarían así



4. Los bordes superior e inferior de una placa cuadrada se mantienen aislados, mientras que el borde izquierdo se mantiene a 50°C y el derecho a 100°C . Escriba en forma matricial las ecuaciones simultáneas para la distribución de la temperatura, si se utiliza el método de diferencias finitas con una malla regular ($\Delta x = \Delta y$) que tenga cuatro nodos interiores en la placa.

Nota. Se pide plantear el sistema, no resolverlo. Denote por T_{ij} la temperatura en el nodo (i, j) .

Solución. Escogemos la esquina inferior izquierda de la placa como origen de coordenadas y situamos los ejes a lo largo de los bordes inferior e izquierdo. Tenemos, por lo tanto, $T_{00} = T_{01} = T_{02} = T_{03} = 50$, $T_{30} = T_{31} = T_{32} = T_{33} = 100$.

Así mismo, en cada uno de los cuatro nodos interiores (i, j) , la ecuación laplaciana en diferencias, $T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$ para $i, j = 1, 2$, resulta

$$\begin{array}{llll} i = 1, j = 1 & \Rightarrow & T_{21} + 50 + T_{12} + T_{10} - 4T_{11} = 0 & i = 1, j = 2 \quad \Rightarrow \quad T_{22} + 50 + T_{13} + T_{11} - 4T_{12} = 0 \\ i = 2, j = 1 & \Rightarrow & 100 + T_{11} + T_{22} + T_{20} - 4T_{21} = 0 & i = 2, j = 2 \quad \Rightarrow \quad 100 + T_{12} + T_{23} + T_{21} - 4T_{22} = 0 \end{array}$$

Por otra parte, para discretizar la condición de aislamiento de los bordes superior e inferior, consideramos nodos suplementarios por encima y por debajo de la placa. En los nodos del borde superior, $(1, 3)$ y $(2, 3)$, la derivada en la dirección normal a ese borde $\frac{\partial T}{\partial y}$, que debe ser nula por estar el borde aislado, se aproxima mediante el cociente

$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,4} - T_{i,2}}{2\Delta y}$, en donde $i = 1, 2$. En consecuencia, podemos considerar $T_{i,4} = T_{i,2}$, de manera que la ecuación laplaciana en diferencias correspondiente a los nodos del borde superior $T_{i+1,3} + T_{i-1,3} + T_{i,4} + T_{i,2} - 4T_{i,3} = 0$, quedará así

$$\begin{array}{llll} i = 1 & \Rightarrow & T_{23} + 50 + 2T_{12} - 4T_{13} = 0 & i = 2 \quad \Rightarrow \quad 100 + T_{13} + 2T_{22} - 4T_{23} = 0 \end{array}$$

Análogamente, en el borde inferior, $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,1} - T_{i,-1}}{2\Delta y} = 0$, luego $T_{i,1} = T_{i,-1}$ para $i = 1, 2$, y la laplaciana en diferencias, $T_{i+1,0} + T_{i-1,0} + T_{i,1} + T_{i,-1} - 4T_{i,0} = 0$, resulta

$$\begin{array}{llll} i = 1 & \Rightarrow & T_{20} + 50 + 2T_{11} - 4T_{10} = 0 & i = 2 \quad \Rightarrow \quad 100 + T_{10} + 2T_{21} - 4T_{20} = 0 \end{array}$$

Hemos obtenido ocho ecuaciones lineales que forman el siguiente sistema, expresado en forma matricial

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{10} \\ T_{20} \\ T_{11} \\ T_{21} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \\ 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Reordenando filas

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{10} \\ T_{20} \\ T_{11} \\ T_{21} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 50 \\ 100 \\ 50 \\ 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$