

Material autorizado. Exclusivamente, un libro, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan. El examen se calificará con un **cero** si el alumno utiliza cualquier material que no esté expresamente autorizado o se comunica o intercambia material con otros o es sorprendido con cualquier equipo de comunicación o almacenamiento de información en disposición de ser empleado, lo haya o no utilizado.

Entregue esta hoja al terminar el examen.

1. a) Aplique el método de Newton-Raphson para deducir un algoritmo que permita aproximar la raíz cúbica del número real positivo a a partir de una *semilla* x_0 . (3 puntos)

b) Supongamos que $0 < x_0 < \sqrt[3]{a}$. Aplique el binomio de Newton (cubo de una suma) para demostrar que el error $E_n = \sqrt[3]{a} - x_n$ cometido en la n -ésima aproximación positiva x_n del algoritmo del apartado a) verifica $|E_n| < \frac{|x_n^3 - a|}{3x_0x_n}$. (4 puntos)

c) Aplique el algoritmo del apartado a) para aproximar, con seis cifras decimales exactas, la raíz cúbica de $a = 235600$, partiendo de $x_0 = 50$. (3 puntos)

Notas. Para que el resultado sea válido, el algoritmo se tiene que poder expresar utilizando sólo operaciones aritméticas (sumas, restas multiplicaciones y divisiones) y debe deducirse por el procedimiento indicado. En este ejercicio no está permitido calcular raíces con la calculadora, por lo que el criterio de paro en el apartado c) debe establecerse necesariamente mediante la expresión del apartado b) .

2. Emplee el método de Gauss-Seidel con sobrerelajación ($\lambda = 1.1$), aplicando el criterio de paro que aparece a la derecha, para resolver el sistema de la izquierda, comenzando con $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$

$$9x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 60$$

$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 18$$

$$\varepsilon_a^{ij} = \left| \frac{\tilde{x}_i^j - \tilde{x}_i^{j-1}}{\tilde{x}_i^j} \right| \leq 0.05 \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

Notas. x_i^j es la j -ésima aproximación para x_i , mientras que $\tilde{x}_i^j$ es el valor modificado de x_i^j por efecto de la relajación. No reordene filas ni columnas. El resultado debe presentarse en una tabla como la siguiente

j	x_1^j	$\tilde{x}_1^j$	ε_a^{1j}	x_2^j	$\tilde{x}_2^j$	ε_a^{2j}	x_3^j	$\tilde{x}_3^j$	ε_a^{3j}
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..

3. Determine la serie de Fourier completa para la forma de onda de periodo $T = 1$ que verifica $f(t) = 2|t|$ para $t \in [-1/2, 1/2]$. Construya los espectros de amplitud y de fase.

4. Los bordes superior e inferior de una placa cuadrada se mantienen aislados, mientras que el borde izquierdo se mantiene a 50°C y el derecho a 100°C . Escriba en forma matricial las ecuaciones simultáneas para la distribución de la temperatura, si se utiliza el método de diferencias finitas con una malla regular ($\Delta x = \Delta y$) que tenga cuatro nodos interiores en la placa.

Nota. Se pide plantear el sistema, no resolverlo. Denote por T_{ij} la temperatura en el nodo (i, j) .