

1. Consideremos el conjunto  $A$  formado por los números de la forma  $n2^k$ , en donde  $n$  y  $k$  son enteros tales que  $2^{15} \leq n < 2^{16}$ ,  $-47 \leq k \leq 16$ . Se pide determinar razonadamente:

a) Los valores de:  $m = \min A$ ,  $M = \max A$ ,  $\varepsilon = \min \{x \in A : x > 1\}$ .

b) El error relativo más grande que se puede cometer al reemplazar un número real  $x \in [m, M]$  por el elemento de  $A$  más cercano a  $x$ , esto es, se pide calcular

$$\max \left\{ \frac{\min \{|x - a| : a \in A\}}{x} : x \in [m, M] \right\}$$

c) Los enteros  $n \in [2^{15}, 2^{16})$  y  $k \in [-47, 16]$  que verifican  $n2^k = 1066656$ .

### Solución.

a)

$$m = \min A = 2^{15}2^{-47} = 2^{-32}$$

$$M = \max A = (2^{16} - 1)2^{16} = 2^{32} - 2^{16}$$

$$\varepsilon = \min \{x \in A : x > 1\} = (2^{15} + 1)2^{-15} = 1 + 2^{-15}$$

b) Un número  $x$  del intervalo  $[m, M]$  siempre estará comprendido entre dos valores de  $A$ , esto es

$$n2^k \leq x < (n+1)2^k$$

en donde  $2^{15} \leq n < 2^{16}$ ,  $-47 \leq k \leq 16$ . Obsérvese que está fórmula también es correcta cuando  $n = 2^{16} - 1$ , porque  $2^{15}2^{k+1} = (n+1)2^k$ . El error relativo máximo dentro de ese intervalo se alcanzará en su mitad izquierda, porque en la mitad derecha los errores son iguales, pero los dividimos entre una cantidad mayor. Así que el error relativo más grande, cuando  $x$  está en el intervalo  $(n2^k, (n+1)2^k)$ , se

alcanza con el máximo de la función  $E(x) = \frac{x - n2^k}{x}$  siendo  $x \in [n2^k, n2^k + 2^{k-1}]$ . Como se trata de

una función creciente,  $E(x) = 1 - \frac{n2^k}{x}$ , el máximo se alcanza en el punto medio  $x = n2^k + 2^{k-1}$ , y el error

relativo máximo en ese intervalo concreto es  $E(n2^k + 2^{k-1}) = \frac{n2^k + 2^{k-1} - n2^k}{n2^k + 2^{k-1}} = \frac{2^{k-1}}{n2^k + 2^{k-1}} = \frac{1}{2n+1}$

El valor máximo de esos errores se alcanza para  $n = 2^{15}$ , luego el máximo error relativo es

$$E = \frac{1}{2^{16} + 1}$$

c) Tomando logaritmos decimales en la expresión  $n2^k = 1066656$  se tiene  $\log n + k \log 2 = \log(1066656)$ , esto es  $k \log 2 = \log(1066656) - \log n$ .

Por otra parte, como  $2^{15} \leq n < 2^{16}$ , resulta que  $15 \log 2 \leq \log n < 16 \log 2$ . Así que

$$\log(1066656) - 16 \log 2 \leq k \log 2 < \log(1066656) - 15 \log 2$$

en consecuencia

$$\frac{\log(1066656) - 16 \log 2}{\log 2} \leq k < \frac{\log(1066656) - 15 \log 2}{\log 2}$$

aproximando los logaritmos,  $4.024663546 \leq k < 5.024663546$ , luego debe ser  $k = 5$ . Ahora

$$\log n = \log(1066656) - 5 \log 2 = \log(1066656) - \log(2^5) = \log\left(\frac{1066656}{2^5}\right) = \log(33333)$$

de manera que  $n = 33333$ .

**2.** Aplique el método de Bairstow para calcular de forma aproximada todas las raíces del polinomio  $p(x) = x^4 - 2x^3 + 258x^2 - 512x + 512$ . Utilice como valores iniciales  $r = 2, s = -1$  para el binomio  $x^2 - rx - s$ . Aplique una iteración del método (es decir, tiene que calcular  $\Delta r$  y  $\Delta s$  una sola vez y dividir polinomios dos veces). Trabaje con la máxima precisión que le permita su calculadora, presentando los resultados intermedios y finales con cuatro cifras significativas.

**Solución.** Comenzamos efectuando la división del polinomio. Es indiferente el procedimiento que se utilice para hacer la división, pero lo más recomendable es la *división sintética* (ecuaciones 7.32)

$$\begin{aligned} b_4 &= a_4 = 1 \\ b_3 &= a_3 + rb_4 = -2 + 2 = 0 \\ b_2 &= a_2 + rb_3 + sb_4 = 258 + 2 \times 0 - 1 = 257 \\ b_1 &= a_1 + rb_2 + sb_3 = -512 + 2 \times 257 - 0 = 2 \\ b_0 &= a_0 + rb_1 + sb_2 = 512 + 2 \times 2 - 257 = 259 \end{aligned}$$

Las ecuaciones 7.36 nos permiten hallar las estimaciones de las derivadas de las funciones  $b_i$

$$\begin{aligned} c_4 &= b_4 = 1 \\ c_3 &= b_3 + rc_4 = 2 \\ c_2 &= b_2 + rc_3 + sc_4 = 257 + 4 - 1 = 260 \\ c_1 &= b_1 + rc_2 + sc_3 = 2 + 520 - 2 = 520 \end{aligned}$$

Planteamos ahora el sistema

$$\begin{aligned} 260\Delta r + 2\Delta s &= -2 \\ 520\Delta r + 260\Delta s &= -259 \end{aligned}$$

cuya solución es  $\Delta s = -\frac{255}{256} \approx -0.996, \Delta r = -\frac{1}{33280} \approx 0.000$ . Los nuevos valores de  $r$  y  $s$  son

$$r = 2 + 0.000 = 2.000, \quad s = -1 - 0.996 = -1.996$$

Dividimos ahora el polinomio  $p(x) = x^4 - 2x^3 + 258x^2 - 512x + 512$  entre  $q(x) = x^2 - 2x + 1.996$  para obtener un cociente determinado por los coeficientes (ecuaciones 7.32)

$$\begin{aligned} b_4 &= a_4 = 1 \\ b_3 &= a_3 + rb_4 = -2 + 2 = 0 \\ b_2 &= a_2 + rb_3 + sb_4 = 258 + 2 \times 0 - 1.996 = 256.004 \approx 256.0 \end{aligned}$$

El cociente es entonces  $c(x) = b_4x^2 + b_3x + b_2 = x^2 + 256.0$ . En consecuencia, las raíces del polinomio  $p(x) = x^4 - 2x^3 + 258x^2 - 512x + 512$  se pueden aproximar mediante las de  $q(x) = x^2 - 2x + 1.996$  y las de  $c(x) = x^2 + 256.0$ . Por lo tanto, nuestras aproximaciones son

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 + \sqrt{4 - 4 \times 1.996}}{2} \approx \frac{2 + 1.995995992i}{2} \approx 1 + 0.998i \\ x_2 &= \frac{2 - \sqrt{4 - 4 \times 1.996}}{2} \approx \frac{2 - 1.995995992i}{2} \approx 1 - 0.998i \\ x_3 &= \sqrt{-256.0} = 16.00i \\ x_4 &= i\sqrt{-256.0} = -16.00i \end{aligned}$$

**Nota 1.** En este caso, al estar *preparado* el polinomio (es de grado 4 y tiene raíces imaginarias puras), es fácil hallar las soluciones exactas, que son  $1 + i, \quad 1 - i, \quad 16i, \quad -16i$ .

**Nota 2.** Una vez que se han hallado los nuevos valores de  $r$  y  $s$ , que permiten aproximar las dos primeras raíces  $x_1, x_2$ , la división del polinomio  $p(x)$  entre  $(x - x_1)$  primero y entre  $(x - x_2)$  después, sugiere que no se ha comprendido en qué consiste la división sintética que se ha utilizado para aproximar esas dos primeras raíces.

**3.** En este ejercicio **todas** las operaciones deben hacerse redondeando a **dos** cifras significativas. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 2.2 & 0 \\ 2.3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 0 \\ 5.6 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- a) Calcule de forma aproximada  $A^{-1}$  mediante eliminación de Gauss.  
 b) Aplique el apartado a) para resolver de forma aproximada el sistema  $AX = B$ .  
 c) Mejore la solución hallada en b) mediante refinamiento iterativo (basta una iteración).

**Solución.** a) Tenemos que aplicar eliminación de Gauss para invertir una matriz; podemos hacerlo mediante una descomposición  $LU$  o continuar la eliminación hasta diagonalizar completamente la matriz (en vez de *triangularizarla*). La idea es aplicar a la matriz identidad las mismas transformaciones que hagamos a la matriz  $A$ . Si después de una serie de transformaciones (resumidas en la multiplicación por una cierta matriz  $C$ ) la matriz  $A$  se ha convertido en  $CA = I$ , (esto implica  $C = A^{-1}$ ) entonces  $I$  se habrá convertido  $CI = A^{-1}$ . Comenzamos entonces los cálculos. No aplicamos pivoteo. Redondeamos *cada operación* a dos cifras significativas (lo más cómodo es poner la calculadora en notación científica con dos cifras en la mantisa y anotar el resultado redondeado de cada suma o multiplicación).

$$\begin{aligned} A \mid I &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1.1 & 0 & 0.9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2.3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1.1 & 0 & 0.9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0 & 0 & -0.90 & -2.1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1.1 & 0 & 0.0 & -1.1 & 0 & 1 \\ 0 & 2.2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0 & 0 & -0.9 & -2.1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0.0 & -1.0 & 0 & 0.91 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.45 & 0 \\ 0.0 & 0 & 1 & 2.3 & 0 & -1.1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

En consecuencia,  $A^{-1} \approx D = \begin{pmatrix} -1.0 & 0 & 0.91 \\ 0 & 0.45 & 0 \\ 2.3 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}$ .

b) Si  $AX = B$ , entonces  $X = A^{-1}B \approx DB = \begin{pmatrix} -1.0 & 0 & 0.91 \\ 0 & 0.45 & 0 \\ 2.3 & 0 & -1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.1 \\ 0 \\ 5.6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0 \\ 0.9 \end{pmatrix}$

c) Sea  $X_0 = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0 \\ 0.9 \end{pmatrix}$  la aproximación de la solución hallada en el apartado anterior. Supongamos que la solución verdadera es  $X = X_0 + \Delta X$ . Entonces

$$A(\Delta X) = AX - AX_0 = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 0 \\ 5.6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 2.2 & 0 \\ 2.3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0 \\ 0.9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.1 - 2.2 - 0.81 \\ 0 \\ 5.6 - 4.6 - 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.09 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Este sistema se puede resolver aproximadamente aplicando los cálculos del apartado a)

$$\Delta X \approx \begin{pmatrix} -1.0 & 0 & 0.91 \\ 0 & 0.45 & 0 \\ 2.3 & 0 & -1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.09 \\ 0 \\ 0.10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.09 + 0.091 \\ 0 \\ 0.21 - 0.11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0.10 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la solución mejorada es  $X_1 = X_0 + \Delta X = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0 \\ 0.9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0.10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0 \\ 1.0 \end{pmatrix}$

**Nota:** Evidentemente la solución exacta es  $x = 2, y = 0, z = 1$ . El objetivo del ejercicio no es resolver una sistema  $3 \times 3$  (contenido incluido en la enseñanza obligatoria), sino comprobar cómo una solución aproximada puede mejorarse mediante refinamiento iterativo manteniendo en todos los cálculos la misma precisión. Por eso es absolutamente obligatorio seguir las instrucciones del enunciado (de hecho, siempre lo es): redondear todas las operaciones a dos cifras significativas, resolver el sistema utilizando la aproximación de la inversa y volver a utilizar ese método para resolver el sistema que se plantea en el refinamiento iterativo. Resulta absurdo utilizar un método más preciso para resolver el sistema que aparece en el refinamiento iterativo que para hallar la solución inicial. Por ejemplo, si resolvemos de forma exacta el sistema del refinamiento iterativo, obviamente obtenemos la solución exacta sea cual sea la solución aproximada inicial; pero entonces, ¿para qué obtener primero una solución aproximada si podemos hallar la exacta?.

Quien haya optado por una descomposición  $LU$ , debería haber obtenido la siguiente factorización aproximada

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 2.2 & 0 \\ 2.3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2.1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 2.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9 \end{pmatrix}$$

4. Resuelva mediante el método de Ralston, desde  $x_0 = 1$  hasta  $x_3 = 1.3$  con tamaño de paso  $h = 0.1$ , el problema de valores iniciales  $xy' = 2y$  ;  $y(1) = 2$ .

**Solución.** El esquema de este método de Runge-Kutta de segundo orden es

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{k_1 + 2k_2}{3}h \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1h\right) \end{aligned}$$

En nuestro caso tenemos:  $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$ ,  $h = 0.1$ , por lo que el algoritmo es

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{0.1k_1 + 0.2k_2}{3} \\ k_1 &= \frac{2y_i}{x_i} \\ k_2 &= \frac{2\left(y_i + \frac{0.3}{4}k_1\right)}{x_i + \frac{0.3}{4}} \end{aligned}$$

Así se obtienen los siguientes resultados

| $x_i$ | $y_i$                                                                                  | $k_1$                                            | $k_2$                                                                                            |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | 2                                                                                      | $\frac{2 \times 2}{1} = 4$                       | $\frac{2\left(2 + \frac{0.3}{4}4\right)}{1 + \frac{0.3}{4}} = 4.279069767$                       |
| 1.1   | $2 + \frac{0.1 \times 4 + 0.2 \times 4.279069767}{3} = 2.418604651$                    | $\frac{2 \times 2.418604651}{1.1} = 4.397463002$ | $\frac{2\left(2.418604651 + \frac{0.3}{4}4.397463002\right)}{1.1 + \frac{0.3}{4}} = 4.678152129$ |
| 1.2   | $2.418604651 + \frac{0.1 \times 4.397463002 + 0.2 \times 4.678152129}{3} = 2.87706356$ | $\frac{2 \times 2.87706356}{1.2} = 4.795105933$  | $\frac{2\left(2.87706356 + \frac{0.3}{4}4.795105933\right)}{1.2 + \frac{0.3}{4}} = 5.077170988$  |
| 1.3   | $2.87706356 + \frac{0.1 \times 4.795105933 + 0.2 \times 5.077170988}{3} = 3.37537849$  |                                                  |                                                                                                  |

En consecuencia, las aproximaciones obtenidas son

$$y(1.1) \approx 2.418604651$$

$$y(1.2) \approx 2.87706356$$

$$y(1.3) \approx 3.37537849$$

**Nota.** Se comprueba fácilmente que la solución exacta es  $y = 2x^2$ .