

1. Aplique la fórmula del error de la regla del trapecio para determinar el número de subintervalos que deben tomarse para calcular la integral $\int_4^6 (x^3 - e^{-x}) dx$ mediante la regla del trapecio de aplicación múltiple con un error de truncamiento menor que 0.01 (en valor absoluto).

Solución. El error de truncamiento para la regla del trapecio de aplicación múltiple viene dado por

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i)$$

(ec. 21.11). Aquí $\int_a^b f(x)dx$ es la integral que se quiere aproximar, n es el número de subintervalos en que se divide el intervalo $[a, b]$ y $\xi_1, \dots, \xi_n$ son ciertos puntos desconocidos de cada uno de los subintervalos. En nuestro caso, $a = 4, b = 6$ y

$$f(x) = x^3 - e^{-x} \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 + e^{-x} \quad ; \quad f''(x) = 6x - e^{-x}$$

$$\sum_{i=1}^n f''(\xi_i) = \sum_{i=1}^n (6\xi_i - e^{-\xi_i}) \leq 6 \sum_{i=1}^n \xi_i \leq 6 \sum_{i=1}^n \left(4 + \frac{2i}{n}\right) = 24n + \frac{12}{n} \sum_{i=1}^n i = 24n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} = 30n + 6$$

En consecuencia, para todo $n > 1$

$$|E_t| = \frac{2^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) < \frac{2}{3n^3} (30n + 6) = \frac{20n + 4}{n^3} < \frac{24n}{n^3} = \frac{24}{n^2}$$

Para conseguir que $|E_t| < 0.01$ basta con exigir $\frac{24}{n^2} < 0.01$, esto es, $n > \sqrt{\frac{24}{0.01}} \approx 48.98979486$. Es sencillo mejorar esta estimación, pues, para $n > 40$, tenemos $\frac{20n + 4}{n^3} < \frac{804}{40n^2}$. Así que, para conseguir que $|E_t| < 0.01$, basta exigir que $\frac{804}{40n^2} < 0.01$, esto es, $n > \sqrt{2010} \approx 44.83302354$. Por lo tanto, basta escoger $n = 45$.

Nota 1 . El valor exacto de la integral es $\int_4^6 (x^3 - e^{-x}) dx = 260 + e^{-6} - e^{-4} \approx 259.9841632$, mientras que los resultados que se obtienen al aplicar la regla del trapecio en n subintervalos son

n	Integral	Error
43	259,9949769	0,01081372
44	259,994491	0,01032777
45	259,994037	0,00987385
46	259,9936124	0,00944921

En este caso particular, la cota del número de subintervalos no ha podido ser más precisa.

Nota 2 . Debe señalarse que la ecuación 21.13 es una fórmula aproximada que no garantiza una cota del número de subintervalos necesarios. En el ejercicio que nos ocupa proporcionaría la estimación $n = 45$, pero en otros casos podría hacer que nos equivocáramos. Por ejemplo, si $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 23.999x^2$ con $a = 0, b = 2$, entonces $\overline{f''} = \frac{1}{2} \int_0^2 f''(x)dx = -0.002$ de manera que $E_a = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \overline{f''} = -\frac{0.004}{3n^2}$, por lo que parecería que basta con tomar $n = 1$ para obtener un error menor que 0.01. Sin embargo, $\int_0^2 f(x)dx = 19.19733333$ mientras que $\frac{2(f(0) + f(2))}{2} = 15.996$.

2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando la descomposición LU con pivoteo parcial.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 7 \\ 3x + y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= 8 \end{aligned}$$

Solución. En forma matricial, $AX = B$, en donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

La descomposición LU de una matriz A consiste en factorizarla, expresándola como el producto $A = LU$ de una matriz triangular inferior L por una matriz triangular superior U . Al resolver un sistema lineal mediante descomposición LU con pivoteo parcial, no es exactamente la matriz A de los coeficientes la que debe ser factorizada, sino la matriz que es el resultado de permutar las filas de A como consecuencia del pivoteo parcial. Por lo tanto, es necesario *llevar la cuenta* de las permutaciones efectuadas. Una ventaja de utilizar esta descomposición frente al método convencional de Gauss (que requiere el mismo número de operaciones) es que podemos realizar la fase de eliminación sin implicar para nada a la matriz B , así podemos resolver varios sistemas al mismo tiempo. En definitiva, vamos a obtener una factorización de la forma $OA = LU$, en donde O es una matriz de permutación (el resultado de permutar las filas en la matriz identidad).

Una manera conveniente de desarrollar los cálculos consiste en adjuntar a la matriz de los coeficientes una columna cuyos elementos representen a las filas de la matriz identidad. Por otra parte, anotaremos los factores f_{ij} de las combinaciones lineales en los espacios que vayamos anulando al aplicar eliminación, mientras que las permutaciones aplicadas quedarán registradas en la última columna. Comenzamos con pivoteo parcial: permutamos la primera y segunda filas

$$A \mid I = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & I \\ 3 & 1 & -1 & II \\ 1 & 2 & 1 & III \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & II \\ 2 & 1 & 1 & I \\ 1 & 2 & 1 & III \end{array} \right)$$

Anulamos las casillas 2^a y 3^a de la 1^a columna. Colocamos los factores en esas casillas y pivoteamos. Después hacemos un cero en la casilla 3^a de la 2^a columna y colocamos el factor en esa casilla.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & II \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & I \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & III \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & II \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & III \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & I \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & II \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & III \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & I \end{array} \right)$$

Hemos obtenido las siguientes matrices, que verifican $LU = OA$.

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, resolvemos hacia atrás. Como $LUX = OAX = OB$, denominando $D = UX$, tenemos

$$LD = OB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ \frac{1}{3}d_1 + d_2 \\ \frac{2}{3}d_1 + \frac{1}{5}d_2 + d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Luego $d_1 = 2, d_2 = 8 - \frac{1}{3}2 = \frac{22}{3}, d_3 = 7 - \frac{2}{3}2 - \frac{1}{5}\frac{22}{3} = \frac{21}{5}$. Y resolviendo de nuevo hacia atrás en $UX = D$

$$UX = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + y - z \\ \frac{5}{3}y + \frac{4}{3}z \\ \frac{7}{5}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{22}{3} \\ \frac{21}{5} \end{pmatrix}$$

obtenemos la solución: $z = 3, y = \frac{3}{5} \left(\frac{22}{3} - 4 \right) = 2, x = \frac{1}{3} (2 + 3 - 2) = 1$, esto es

$$x = 1 \quad ; \quad y = 2 \quad ; \quad z = 3$$

Nota. Evidentemente un sistema tan sencillo como el del enunciado no requiere ni factorización LU , ni pivoteo parcial. No obstante, es necesario hacerlo por ese procedimiento, porque así lo indica el enunciado. El propósito del ejercicio es comprobar si se comprende el método, no si sabe resolver el sistema.

3. Desarrolle segmentarias cuadráticas para la siguiente tabla con la condición $f'(0) = 1$.

x	0	4	6	10
$f(x)$	1	21	43	111

Solución. La forma genérica de un polinomio de segundo grado desarrollado como polinomio de Taylor alrededor de un cierto punto $x = a$ es

$$P(x) = \frac{P''(a)}{2} (x - a)^2 + P'(a) (x - a) + P(a)$$

El polinomio correspondiente al intervalo $[0, 4]$ debe cumplir $P_1(0) = 1$, $P'_1(0) = 1$; luego debe ser de la forma $P_1(x) = A(x - 0)^2 + (x - 0) + 1$. Para que verifique también $P_1(4) = 21$, hacemos $A(4^2) + 4 + 1 = 21$, de donde se obtiene $A = 1$, por lo que

$$P_1(x) = x^2 + x + 1$$

Observemos que $P'_1(4) = 9$. Análogamente, el polinomio correspondiente al intervalo $[4, 6]$ debe ser de la forma $P_2(x) = B(x - 4)^2 + 9(x - 4) + 21$. Para determinar B , hacemos $B(6 - 4)^2 + 9(6 - 4) + 21 = 43$, de donde se obtiene $B = 1$. Por lo tanto $P_2(x) = (x - 4)^2 + 9(x - 4) + 21 = x^2 + x + 1$

$$P_2(x) = x^2 + x + 1$$

Además, se tiene $P'_2(6) = 13$. Finalmente, la segmentaria cuadrática correspondiente al intervalo $[6, 10]$ cumple $P_3(x) = C(x - 6)^2 + 13(x - 6) + 43$, además de $P_3(10) = 111$. En consecuencia, $C = 1$ por lo que

$$P_3(x) = x^2 + x + 1$$

Hemos obtenido tres segmentarias idénticas porque el polinomio en cuestión pasa por los cuatro puntos de la tabla y su derivada en el origen es 1.

Nota. Para resolver matricialmente el problema, el planteamiento es el siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 & 0 & -12 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 21 \\ 0 \\ 21 \\ 43 \\ 0 \\ 43 \\ 111 \end{pmatrix}$$

4. Sean A una matriz $n \times n$ no singular y B una matriz columna $n \times 1$. Para resolver el sistema de lineal n ecuaciones con n incógnitas $AX = B$, se calcula una matriz $n \times n$ no singular D que aproxima a la inversa A^{-1} . Así se obtiene una primera solución aproximada $X_0 = DB$. Para mejorar la solución, se aplica la técnica de refinamiento iterativo una y otra vez, utilizando la matriz D , y obteniendo así una sucesión de aproximaciones de la solución que viene dada por una fórmula de recurrencia

$$X_{k+1} = M X_k + X_0, \quad k \geq 0$$

en donde M es una cierta matriz $n \times n$.

a) Determinése la matriz M en función de las matrices A, D y la identidad I .

b) Demuéstrese que si la sucesión $\{X_k\}$ converge, entonces lo hace hacia la solución de la ecuación $AX = B$.

Solución. a) Seguimos los pasos de la técnica de refinamiento iterativo, explicada en la sección 10.3.3, adaptada a este problema. Sustituimos nuestra primera aproximación X_0 en el sistema y obtenemos $AX_0 = \tilde{B}$. Por otra parte, si escribimos la solución exacta como $X = X_0 + \Delta X$, entonces

$$A(\Delta X) = AX - AX_0 = B - \tilde{B}$$

Este nuevo sistema, $A(\Delta X) = B - \tilde{B}$, se puede resolver aproximadamente utilizando de nuevo la matriz $D \approx A^{-1}$, de manera que $\Delta X \approx DB - D\tilde{B} = X_0 - DAX_0$. Así que nuestra segunda aproximación es $X_1 = X_0 + X_0 - DAX_0$. Si aplicamos reiteradamente la técnica, razonando por inducción, podremos mejorar una aproximación X_k mediante

$$\begin{aligned} X = X_k + \Delta X &\Rightarrow A(\Delta X) = B - AX_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta X \approx DB - DAX_k = X_0 - DAX_k &\Rightarrow X_{k+1} = X_k + X_0 - DAX_k = (I - DA) X_k + X_0 \end{aligned}$$

por lo que

$$M = I - DA$$

b) Si la sucesión $\{X_k\}$ converge a una matriz columna L , entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} (X_{k+1} - (I - DA) X_k - X_0) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} X_{k+1} \right) - (I - DA) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} X_k \right) - X_0 = \\ &= L - (I - DA) L - X_0 = L - L + DAL - DB = DAL - DB \end{aligned}$$

Como la matriz cuadrada D es no singular, podemos multiplicar la igualdad $DAL = DB$ por D^{-1} , para obtener $AL = B$. Por lo tanto, $X = L$ es la solución del sistema $AX = B$.