



Titulación: Grado en Ingeniería
Asignatura: Métodos Numéricos
Autor: César Menéndez

Ultima actualización: 25/03/2011

Ecuaciones diferenciales ordinarias: Problemas de valor inicial

Planificación:

Materiales:

Conocimientos previos:

3 Teoría+2 Prácticas+4 Laboratorio
MATLAB
T^{mas}. básicos de Cálculo –
Desarrollos de Taylor – Sistemas
lineales –



Descripción del problema

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Euler y Taylor
- Mét. Runge-Kutta
- Mét. Multipaso*
- EDOs orden n*
- Estables y rígidos*
- Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

- Obtener las funciones que verifican una ecuación en que la variable dependiente se relaciona con su variación con respecto a la variable independiente.

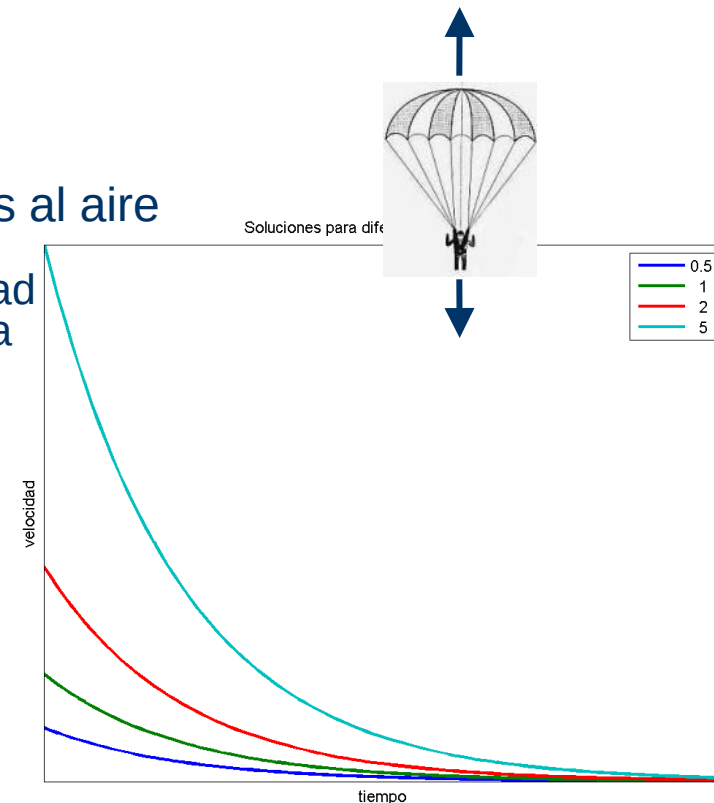
- Ejemplo: Ley de Newton aplicada al cálculo de la velocidad de descenso de un paracaidista:

$$\sum F = ma \rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{\sum F}{m}$$

- Fuerzas actuantes:
 - Gravedad (peso)
 - Resistencia del paracaídas al aire
 - Opuesta al descenso
 - Proporcional a la velocidad
 - Coeficiente de resistencia

$$\frac{dv}{dt} = g - c \frac{v}{m} \rightarrow \text{¿} v(t) \text{?}$$

$$v(t) = \frac{gm}{c} \left(1 - \alpha e^{-\frac{ct}{m}} \right)$$





Objetivos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Euler y Taylor
- Mét. Runge-Kutta
- Mét. Multipaso*
- EDOs orden n^*
- Estables y rígidos*
- Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

- Entender los conceptos de orden, consistencia, estabilidad y convergencia.
- Diferenciar los conceptos de error de truncamiento local y global, y su relación.
- Comprender los métodos de Taylor y la interpretación gráfica de los de orden más bajo (Euler, Heun y el polígono mejorado).
- Entender la base de los métodos predictor-corrector y su conexión con las fórmulas de integración.
- Aplicar los métodos de Runge-Kutta y entender cómo se relacionan con el desarrollo en serie de Taylor.
- Aplicar los métodos anteriores a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Reducir una ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden a un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- Comprender la inestabilidad de algunos métodos para tipos especiales de problemas (rígidos).
- Saber seleccionar un método numérico para la solución de un problema particular.



Conceptos básicos (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos

Resolución analítica

Resolución numérica.

- Una ecuación diferencial es cualquier ecuación que comprenda derivadas de una función con respecto a una sola variable independiente.
- Cuando hay varias funciones y una sola variable independiente se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Cuando hay una función y varias variables independientes se tiene una ecuación en derivadas parciales (EDP).
- Cuando hay varias funciones y varias variables independientes se tiene un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (EDP).
- Si una ecuación diferencial se puede escribir como un polinomio, su **orden** es el mayor entero positivo de la n-sima derivada presente en la ecuación.
- La potencia más alta con que aparece la derivada que marca el orden de la ecuación se denomina **grado**.
- Ejemplos
 - $y'' + x(y')^2 + xy = x^3$ EDO segundo orden y grado uno
 - $(y')^3 + (xy')^2 - y^4 = e^x$ EDO primer orden y grado 3
 - $x^3 y_t + xt(y_x)^2 = (x + t^2)^3$ EDP primer orden y grado 2 (2 v.i)
 - $\tau_t = k(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})$ EDP segundo orden y grado 1 (4 v.i.)
 - $y''' + \sin(y') + xy = 5$ EDO tercer orden sin grado



Conceptos básicos (II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos

Resolución analítica

Resolución numérica.

- Forma general de una ecuación diferencial de orden n

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad xy''' + \frac{y + y'}{x^3 y''} - \sin(xy) = e^x$$

- Una EDO es lineal cuando lo es en cada derivada de igual orden

$$f_n(x)y^{(n)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x) \qquad y'' + x(y')^2 + xy = x^3$$

- Una solución explícita de una EDO de orden n es aquella función $y(x)$ que satisface la EDO para todo valor x del intervalo.

$$y' + y = 0, x \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{-x} & \text{Si} \\ y_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & x < 0 \\ 2e^{-x} & x \geq 0 \end{cases} & \text{No} \end{cases}$$

- Una solución implícita de una EDO de orden n es aquella relación $g(x, y)$ que define al menos una $y(x)$ que satisface la EDO para todo valor x del intervalo

$$yy' + x = 0 \rightarrow f(x, y) = y^2 + x^2 + c = 0$$

$$f'(x, y) = 2yy' + 2x = 0$$



Conceptos básicos (III)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos

Resolución analítica

Resolución numérica.

- Una familia de funciones de n parámetros $f(t, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0$ se denomina **solución general** si es solución de la EDO para cualquier valor de los parámetros y no hay un conjunto inferior de parámetros que representen esas soluciones

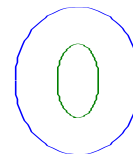
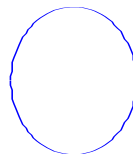
$$y'' - y = 0 \begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{x+c_2} & \text{No} \\ y_2(x) = c_1 e^x & \text{Si} \end{cases}$$

- La función obtenida al seleccionar los valores de los parámetros se denomina **solución particular**

- $f(t, y)$ satisface la condición de Lipschitz en la variable y (es **lipschitciana** respecto a y) en $D \subset \mathbb{R}^2$ si existe L positiva tal que $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$ para todo $(t, y_1), (t, y_2) \in D$.

$$f(t, y) = \frac{y}{2t} + 5, D = [1, 3]^2 \rightarrow |f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left| \frac{y_1 - y_2}{2t} \right| \leq \frac{1}{2} |y_1 - y_2|$$

- Si $f(t, y)$ esta definida en un conjunto convexo D y $|f_y| \leq L$ en D , entonces es lipschitciana en y .
- Un conjunto D es **convexo** cuando dos puntos cualesquiera se pueden unir mediante un segmento rectilíneo cuyos puntos también pertenecen a D .
- Un conjunto D es **conexo** cuando dos puntos cualesquiera se pueden unir mediante una curva cuyos puntos también pertenecen a D .





EDO 1^{er} orden: resolución analítica (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos
Resolución analítica
Resolución numérica.

• Lineales:
$$\begin{cases} y' + p(t)y = q(t) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- Existencia y Unicidad de Solución

Si $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en un abierto que contenga a $[a, b]$

- Obtención de la solución

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t) q(t) dt + c \right)$$

Ejemplos

$$\begin{cases} y' - 2ty = t & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \mu(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2} \quad y(t) = \frac{1}{e^{-t^2}} \left(\int e^{-t^2} t dt + c \right) = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}$$

$$\begin{cases} y' - 2ty = 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \mu(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2} \quad y(t) = e^{t^2} \left(\int e^{-t^2} dt \right) + ce^{t^2}$$

• No lineales
$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad M(t, y) + N(t, y)y' = 0$$

- Existencia y Unicidad de Solución

Si $f(t, y)$ es continua y lipschitziana respecto a y en $D = \{a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$, existe solución y es única (Picard)

- Muy difícil obtener la solución analítica (explícita o implícita) salvo en casos especiales



EDO 1^{er} orden: resolución analítica (II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos

Resolución analítica

Resolución numérica.

- Ejemplo: Solución no única

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} \\ y_2(t) = 0 \end{cases} \Leftarrow \frac{df}{dy} = \left(\frac{1}{3}y\right)^{-2/3} \quad \text{No definida para } y=0$$

- Ejemplo: singularidades de la solución dependen de la condición inicial

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{1-t} \quad \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{2-t}$$

- Métodos analíticos

- Variables separables $M(t) + N(y)y' = 0 \rightarrow N(y)dy = -M(t)dt$

- Ec. homogéneas $f(st, sy) = s^n f(t, y) \rightarrow \text{Cambio } v = \frac{y}{t} \Rightarrow \text{var.sep}$

- Ecuaciones exactas $\frac{d}{dt}(P(t, y)) = M(t, y) + N(t, y)y' = 0 \Rightarrow M_y = N_t$

- Fact. integrantes $\exists \mu(t, y)? : \frac{d}{dt}(P(t, y)) = \mu M(t, y) + \mu N(t, y)y' = 0$

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_t N + \mu N_t$$

$$\exists \mu(t)? \Rightarrow \frac{M_y - N_t}{N} = g(t) \quad \exists \mu(y)? \Rightarrow -\frac{M_y - N_t}{M} = g(y)$$



EDO 1^{er} orden: resolución analítica (III)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos

Resolución analítica

Resolución numérica.

- Ejemplo: Variables separables

$$\begin{cases} y' = \frac{y \cos t}{1 + 2y^2} \rightarrow \frac{1 + 2y^2}{y} dy = \cos t \cdot dt \rightarrow \begin{cases} \ln|y| + y^2 = \sin t + c \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \ln|y| + y^2 = \sin t + 1 \end{cases}$$

- Ejemplo: Ec. homogéneas

$$\begin{cases} y' = -\frac{y^2 + t^2}{yt} \rightarrow (t^2 + v^2 t^2) dt + t^2 v (v dt + t dv) = 0 \rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{-v dv}{1 + 2v^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \ln|t| = -\frac{1}{4} \ln|1 + 2v^2| + \ln c \rightarrow t^2 (t^2 + 2y^2) = c^4 \Rightarrow t^2 (t^2 + 2y^2) = 1$$

- Ejemplo: Ecuaciones exactas

$$\begin{cases} 3y(t^2 - 1)dt + (t^3 + 8y - 3t)dy = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_y = 3(t^2 - 1) = N_t \\ P = \int M dt = \int N dy \end{cases} \rightarrow P = yt^3 - 3ty + f(y)$$

$$\rightarrow P_y = t^3 - 3t + f'(y) = N \rightarrow P = yt^3 - 3ty + 4y^2 + c \Rightarrow P(t, y) = yt^3 - 3ty + 4y^2 - 2 = 0$$

- Ejemplo: Fact. integrantes

$$\begin{cases} (t^2 + y^2)dt + t(t - 2y)dy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_y = 2y & \text{¿}\mu(t)\text{?} \Rightarrow \frac{M_y - N_t}{N} = \frac{2(2y - t)}{t(t - 2y)} = -\frac{2}{t} \\ N_t = 2t - 2y & \text{¿}\mu(y)\text{?} \Rightarrow -\frac{M_y - N_t}{M} = \frac{2(2y - t)}{(t^2 + y^2)} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{t} dt \rightarrow \mu = \frac{1}{t^2} \Rightarrow \begin{cases} \left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right)dt + \left(1 - 2\frac{y}{t}\right)dy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow P(t, y) = t - \frac{y^2}{t} + y - 1 = 0$$



EDO orden superior: resolución analítica (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos

Resolución analítica

Resolución numérica.

● EDO de segundo orden

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 & y'(a) = v_0 \end{cases}$$

– Existencia y Unicidad de Solución

Si $f(t, y)$ es continua y lipschitziana respecto a y e y' en $D = \{a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq \infty, -\infty \leq y' \leq \infty\}$, existe solución y es única

– La obtención de solución analítica es complicada., incluso en casos aparentemente simples, y suelen dar lugar a métodos de coeficientes indeterminados y series de potencias

– Caso lineal

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 & y'(a) = v_0 \end{cases}$$



EDO orden superior: resolución analítica (II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos

Resolución analítica

Resolución numérica.

- E.D.O. lineales homogéneas de coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (I)$$

Ec. Característica : $P(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$

- Las raíces λ de la ecuación característica $P(x)$ proporcionan un sistema fundamental de soluciones:
 - Si λ es una raíz real simple de $P(x)$, $y=e^{\lambda x}$ es solución de la ecuación diferencial.(I)
 - Si λ es una raíz real múltiple de orden m de $P(x)$, $y=x^k e^{\lambda x}$, $k=0, \dots, m-1$ son soluciones independientes de la ecuación diferencial.(I)
 - Si $\lambda = a \pm bi$ son raíces complejas conjugadas de $P(x)$, $y_1 = e^{ax} \cos(bx)$ e $y_2 = e^{ax} \sin(bx)$ son soluciones independientes de la ecuación diferencial.(I).
 - Si $\lambda = a \pm bi$ son raíces complejas conjugadas de multiplicidad m de $P(x)$, $y_{1k} = x^k e^{ax} \cos(bx)$ e $y_{2k} = x^k e^{ax} \sin(bx)$, $k=0, \dots, m-1$ son soluciones independientes de la ecuación diferencial.(I)
- La solución general de la ecuación diferencial (I) se obtiene como combinación lineal de las soluciones simples obtenidas para cada raíz.



EDO orden superior: resolución analítica (III)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos

Resolución analítica

Resolución numérica.

- E.D.O. lineales completas de coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (II)$$

- La solución general de la ecuación es igual a la suma de la solución general de la homogénea correspondiente, y de cualquier solución particular de la ecuación completa.
- Método de los coeficientes indeterminados: Se toma una solución particular de la ecuación completa del mismo tipo que el término independiente y cuyos coeficientes se determinan sustituyendo la solución en la ecuación.
 - Si $f(x)=P_m(x)$ y $\lambda=0$ no es raíz de $P(x)$, $y_p=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_m$.
 - Si $f(x)=P_m(x)$ y $\lambda=0$ es raíz de orden r , de $P(x)$, $y_p=x^r(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_m)$
 - Si $f(x)=e^{ax}P_m(x)$, $y_p=e^{ax}.Q_m(x)$ si a no es raíz de $P(x)$ o $y_p=x^r e^{ax}.Q_m(x)$) si a es raíz de $P(x)$ de orden r .
 - Si $f(x)=e^{ax}(P_m(x)\cos bx+Q_s(x)\sen bx)$, $y_p=e^{ax}(U(x)\cos bx+V(x)\sen bx)$, si $a \pm bi$ no es raíz de $P(x)$ o $y_p=x^r e^{ax}(U(x)\cos bx+V(x)\sen bx)$ si $a \pm bi$ es raíz de $P(x)$ de orden r , donde $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios de grado $= \max(m,s)$



EDO orden superior: resolución analítica (IV)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos

Resolución analítica

Resolución numérica.

- Ejemplo $y^{(4)} - y = x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$
 $y(0) = 1 \quad y'(0) = 2 \quad y''(0) = -3 \quad y'''(0) = 4$

- Solución general de la homogénea

$$P(x) = x^4 - 1 \rightarrow \sigma(P) = \{\pm 1, \pm i\}$$

$$y_g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{0x} \cos(x) + c_4 e^{0x} \sin(x)$$

- Solución particular

$$y_p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \rightarrow$$

$$y_p^{(4)} - y_p = 0 - (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = x^2 \rightarrow \begin{cases} a_2 = -1 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

- Solución completa

$$P(x) = x^4 - 1 \rightarrow \sigma(P) = \{\pm 1, \pm i\}$$

$$y_c(x) = y_g(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x) - x^2$$

- Condiciones iniciales

$$y_c(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad y_c''(0) = c_1 + c_2 - c_3 = -3 \rightarrow$$

$$y_c'(0) = c_1 - c_2 + c_4 = 2 \quad y_c'''(0) = c_1 - c_2 - c_4 = 4$$

$$\rightarrow y_c(x) = e^x - 2e^{-x} + 2\cos(x) - \sin(x) - x^2$$



EDO: resolución numérica (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos

Resolución analítica

Resolución numérica.

• Casos

- La resolución numérica se centra en las EDO de primer orden dado que las de orden superior se pueden reducir a sistemas de primer orden.

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = y' \\ y_2 = y'' \\ y_3 = y^{(3)} \\ \vdots \\ y_n = y^{(n)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(t, y, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ y' = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n \end{cases}$$

- Por su interés específico, a veces se estudian las de segundo orden (asociadas a problemas de contorno).

• Problema perturbado: perturbaciones asociadas a la EDO y a la condición inicial

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z' = f(t, z) + \delta(t) & a \leq t \leq b \\ z(a) = \alpha + \varepsilon_a \end{cases}$$

• Problema bien planteado

- El problema tiene solución única
- El problema perturbado tiene solución única y su error respecto al inicial esta acotado si lo están las perturbaciones

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon) / |\varepsilon_0| < \varepsilon \wedge \forall t \in [a, b] : |\delta(t)| < \varepsilon \Rightarrow |y(t) - z(t)| < k(\varepsilon) \varepsilon$$



EDO: resolución numérica (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Conceptos básicos
Resolución analítica
Resolución numérica.

• Proceso

- No se obtiene la solución analítica, sino un conjunto de pares (t_i, y_i) que representan los valores aproximados de la solución para diferentes valores de la variable independiente.
- Los resultados se deben interpolar (o ajustar) si se desean en valores intermedios.
- Es necesario que el problema este bien planteado ya que los métodos numéricos introducen perturbaciones de los coeficientes debido a la aritmética del ordenador.

- El problema de valor inicial de primer orden esta bien planteado si $f(t, y)$ es continua y lipschitciana respecto a y en $D = \{[a, b] \times (-\infty, \infty)\}$.

- Ejemplo: problema bien planteado

$$\begin{cases} y' = y - t^2 + 1 & 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 0.5 \end{cases} \rightarrow y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 - t^2 + 1 - (y_2 - t^2 + 1)| = 1|y_1 - y_2|$$

$$f_y = 1$$

$$\begin{cases} z' = z - t^2 + 1 + \delta(t) & 0 \leq t \leq 2 \\ z(a) = 0.5 + \varepsilon_a \end{cases} \rightarrow z(t) = (t+1)^2 - (0.5 - \delta(t) - \varepsilon_a)e^t - \delta(t)$$

$$|y(t) - z(t)| = |(\delta(t) + \varepsilon_a)e^t + \delta(t)| \leq (2e^2 + 1)\varepsilon$$



Fundamentos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Met. Euler

Met. Taylor

Errores

• Métodos de Taylor

- Discretizan el intervalo total en n subintervalos iguales (puntos equiespaciados con paso h) y obtiene aproximaciones de la solución en esos puntos.
- Utilizan el desarrollo en serie de Taylor

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y'(t_k) = f(t_k, y(t_k)) & 1 \leq k \leq n & t_k = a + kh \\ y(a) = \alpha & & h = \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

$$y(t_k) = y(t_{k-1}) + y'(t_{k-1})\frac{h}{1!} + y''(t_{k-1})\frac{h^2}{2!} + \cdots + y^{(n-1)}(t_{k-1})\frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!} + y^{(n)}(\varsigma)\frac{h^{(n)}}{n!}$$

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$y''(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))y' = f_t + f_y f$$

$$y'''(t) = \frac{d}{dt} y''(t) = (f_{tt} + f_{ty} f) + (f_{ty} + f_{yy} f) f + f_y (f_t + f_y f)$$

⋮

- Orden de un método: orden de la derivada superior utilizada en el desarrollo de Taylor o, equivalentemente, grado del polinomio para el que el método teórico no tiene error.
- Notación: $w_k \approx y(t_k)$



Método de Euler (Taylor de orden 1)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

- Base teórica y algoritmo

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow y(t_k) = y(t_{k-1}) + y'(t_{k-1}) \frac{h}{1!} + y''(\varsigma) \frac{h^2}{2!}$$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha & t_k = a + kh \\ w_k = w_{k-1} + hf(t_{k-1}, w_{k-1}) & 1 \leq k \leq n \quad h = \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

- Ejemplo: tomando $h=0.25$ y $h=0.1$ resolver y representar la solución

$$y' = -\frac{t}{y} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

$$t_0 = 0 \quad w_0 = 1$$

$$t_1 = h = 0.25 \quad w_1 = w_0 + hf(t_0, w_0) = w_0 - 0.25 \frac{t_0}{w_0} = 1 - 0.25 \frac{0}{1} = 1$$

$$t_2 = 0.5 \quad w_2 = w_1 - 0.25 \frac{t_1}{w_1} = 1 - 0.25 \frac{0.25}{1} = 0.9375$$

$$t_3 = 0.75 \quad w_3 = w_2 - 0.25 \frac{t_2}{w_2} = 0.9375 - 0.25 \frac{0.5}{0.9375} = 0.8042$$

$$t_4 = 1.0 \quad w_4 = w_3 - 0.25 \frac{t_3}{w_3} = 0.8042 - 0.25 \frac{0.75}{0.8042} = 0.5710$$

Fundamentos

Met. Euler

Met. Taylor

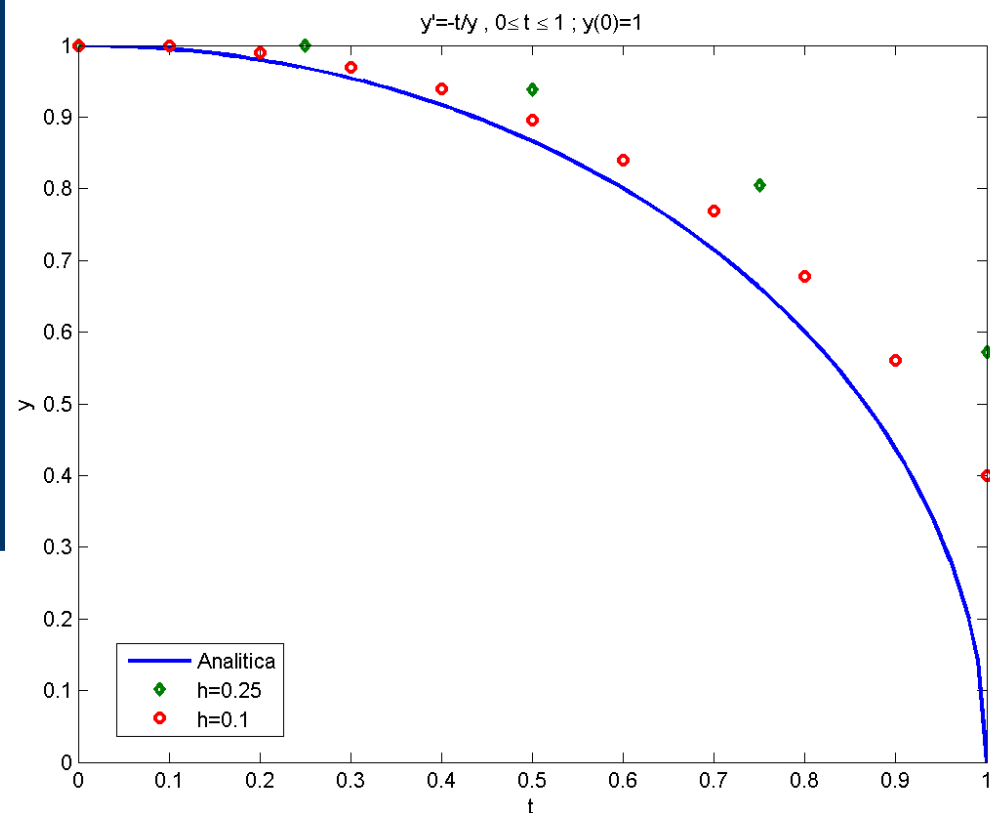
Errores



Ejemplo de Euler

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Euler y Taylor
 - Mét. Runge-Kutta
 - Mét. Multipaso*
 - EDOs orden n^*
 - Estables y rígidos*
 - Resumen
- Bibliografía
- Software

$t_0=0$	$w_0=1.0000$
$t_1=0.1$	$w_1=1.0000$
$t_2=0.2$	$w_2=0.9900$
$t_3=0.3$	$w_3=0.9698$
$t_4=0.4$	$w_4=0.9389$
$t_5=0.5$	$w_5=0.8963$
$t_6=0.6$	$w_6=0.8405$
$t_7=0.7$	$w_7=0.7691$
$t_8=0.8$	$w_8=0.6781$
$t_9=0.9$	$w_9=0.5601$
$t_{10}=1.0$	$w_{10}=0.3994$



Fundamentos

Met. Euler

Met. Taylor

Errores



Método de Taylor de orden superior (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Met. Euler

Met. Taylor

Errores

- Base teórica y algoritmo

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow y(t_{k-1}) + h \left[y'(t_{k-1}) + \dots + y^{(n-1)}(t_{k-1}) \frac{h^{(n-2)}}{(n-1)!} \right] + y^{(n)}(\zeta) \frac{h^{(n)}}{n!}$$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha & t_k = a + kh \\ w_k = w_{k-1} + hT_{n-1}(h, t_{k-1}, w_{k-1}) & 1 \leq k \leq n \quad h = \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

- Ejemplo: tomando $h=0.25$ resolver para Taylor de orden 1, 2, 3 y 4

$$y' = -\frac{t}{y} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

$$y'(t) = -ty^{-1}(t) \quad T_1(t, y, h) = y'(t_k)$$

$$y''(t) = -y^{-1}(1+t^2y^{-2}) \quad T_2(t, y, h) = T_1(t, y, h) + \frac{h}{2}y''(t)$$

$$y'''(t) = -3ty^{-3}(1+t^2y^{-2}) \quad T_3(t, y, h) = T_2(t, y, h) + \frac{h^2}{3!}y'''(t)$$

$$y^{iv}(t) = -3y^{-3}(1+6t^2y^{-2}+5t^4y^{-4}) \quad T_4(t, y, h) = T_3(t, y, h) + \frac{h^3}{4!}y^{iv}(t)$$

$$t_0 = 0 \quad t_1 = 0.25 \quad w_0 = 1$$

$$y'(t_0) = -t_0w_0^{-1} = 0 \quad T_1(t_0, w_0, h) = y'(t_0) = 0$$

$$y''(t_0) = -w_0^{-1}(1+t_0^2w_0^{-2}) = -1 \quad T_2(t_0, w_0, h) = T_1(t_0, w_0, h) + \frac{h}{2}y''(t_0) = 0 - \frac{0.25}{2}1 = -0.125$$



Ejemplo de Taylor (I)

$$y'''(t_0) = -3t_0 w_0^{-3} (1 + t_0^2 w_0^{-2}) = 0$$

$$T_3(t_0, w_0, h) = T_2(t_0, w_0, h) + \frac{h^2}{3!} y'''(t_0) = -0.125 + 0 = -0.125$$

$$y^{iv}(t_0) = -3w_0^{-3} (1 + 6t_0^2 w_0^{-2} + 5t_0^4 w_0^{-4}) = -3$$

$$T_4(t_0, w_0, h) = T_3(t_0, w_0, h) + \frac{h^3}{4!} y^{iv}(t_0) = -0.125 - \frac{0.25^3}{24} 3 = -0.15625$$

$$w_0^1 = w_0^1 + hT_1(t_0, w_0^1, h) = 1 + 0.25 \times 0 = 1$$

$$w_0^2 = w_0^2 + hT_2(t_0, w_0^2, h) = 1 + 0.25 \times (-0.125) = 0.96875$$

$$w_0^3 = w_0^3 + hT_3(t_0, w_0^3, h) = 1 + 0.25 \times (-0.125) = 0.96875$$

$$w_0^4 = w_0^4 + hT_4(t_0, w_0^4, h) = 1 + 0.25 \times (0.15625) = 0.9609375$$

Se repite el proceso con t_2 , t_3 y t_4

orden	T1	T2	T3	T4	Y
$t_0=0$	$w_0=1.0000$	$w_0=1.0000$	$w_0=1.0000$	$w_0=1.0000$	1.0000
$t_1=0.25$	$w_1=1.0000$	$w_1=0.9688$	$w_1=0.9688$	$w_1=0.9683$	0.9682
$t_2=0.50$	$w_2=0.9375$	$w_2=0.8698$	$w_2=0.8675$	$w_2=0.8662$	0.8660
$t_3=0.75$	$w_3=0.8042$	$w_3=0.6783$	$w_3=0.6675$	$w_3=0.6631$	0.6614
$t_4=1.0$	$w_4=0.5710$	$w_4=0.2995$	$w_4=0.2361$	$w_4=0.1990$	0.0000

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Met. Euler

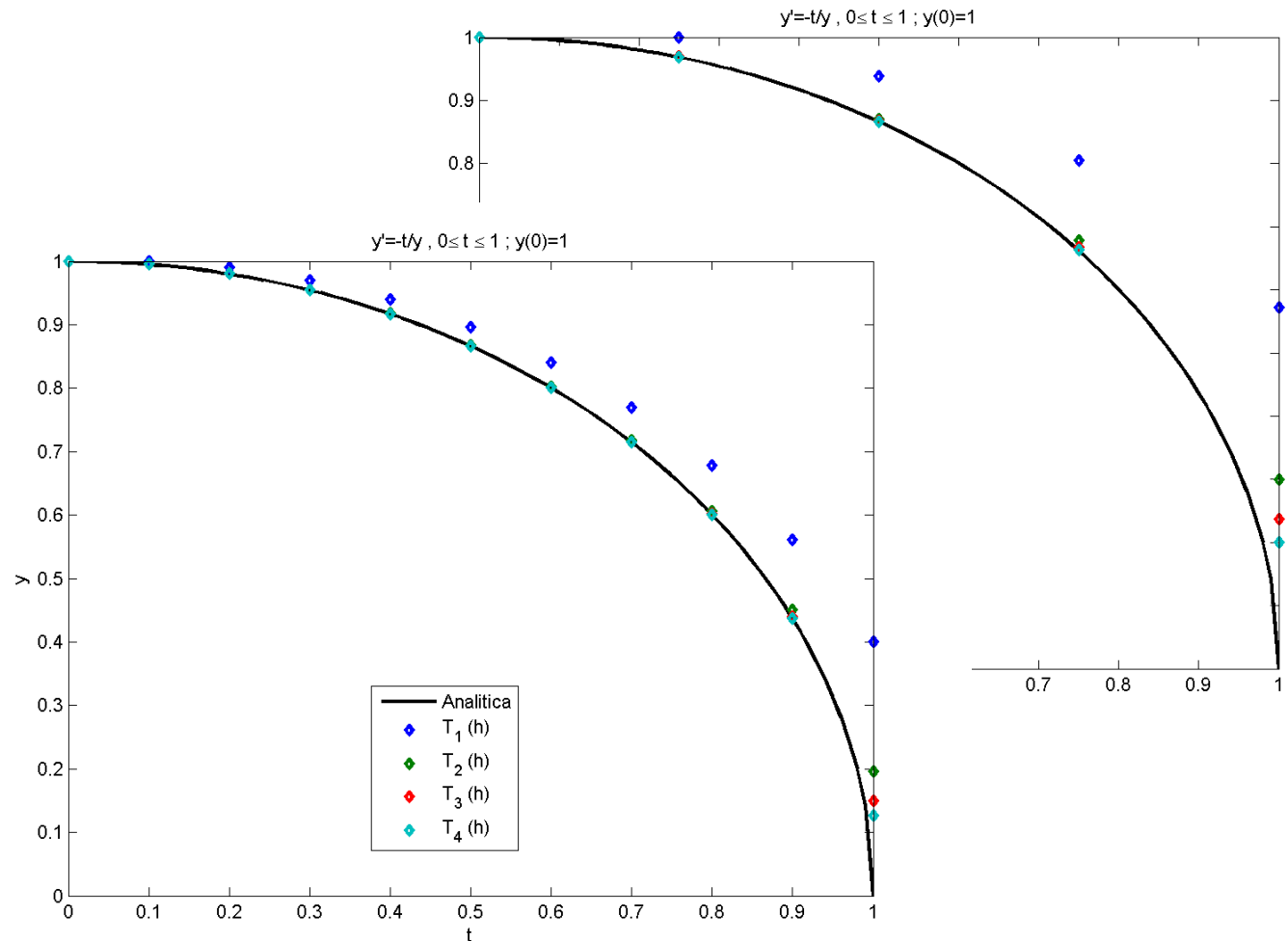
Met. Taylor

Errores



Ejemplo de Taylor (II)

- Representación de resultados para $h=0.25$ v $h=0.1$



- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Euler y Taylor
 - Mét. Runge-Kutta
 - Mét. Multipaso*
 - EDOs orden n^*
 - Estables y rígidos*
 - Resumen
- Bibliografía
- Software

Fundamentos
Met. Euler
Met. Taylor
Errores



Tipos de errores y error local

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

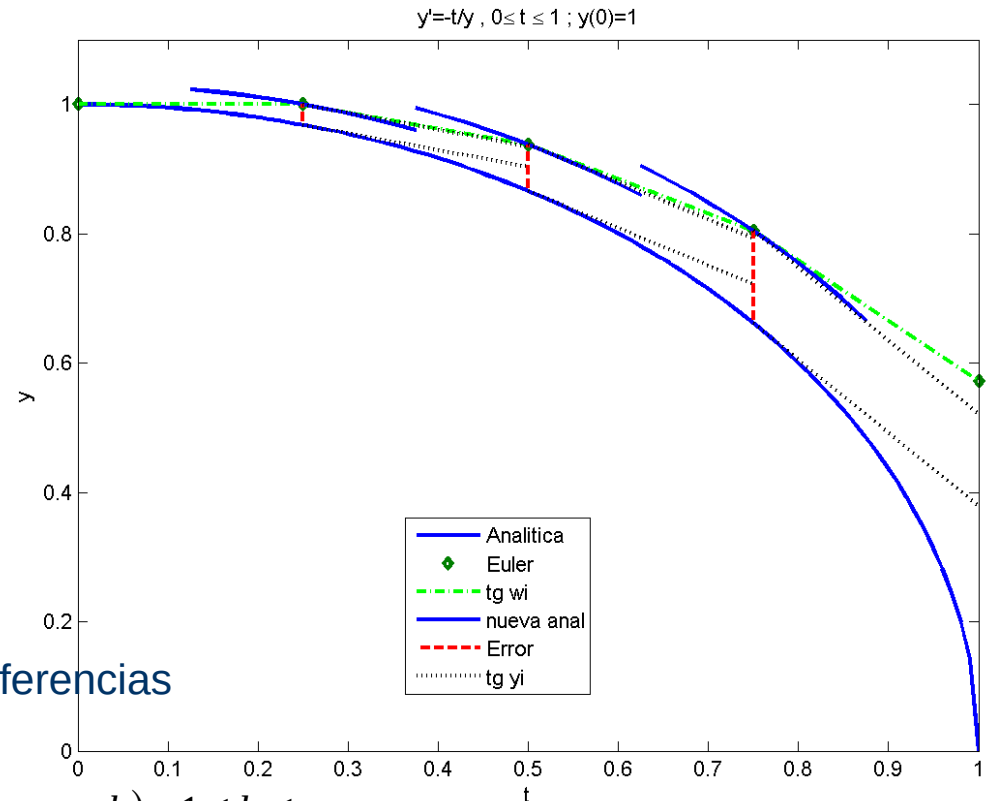
Fundamentos

Met. Euler

Met. Taylor

Errores

- Error de redondeo (representación)
- Error de truncamiento global (local+propagado)



- Un método de diferencias

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_k = w_{k-1} + h\varphi(t_{k-1}, w_{k-1}, h) \quad 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

tiene un error de truncamiento local dado por

$$\tau_k(h) = \frac{y_k - (y_{k-1} + h\varphi(h, t_{k-1}, y_{k-1}))}{h} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h} - \varphi(h, t_{k-1}, y_{k-1})$$



Acotación del error en Euler

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Met. Euler

Met. Taylor

Errores

- Sea el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y) \quad a \leq t \leq b \quad y(a) = \alpha$$

- El error de truncamiento global del método de Euler viene acotado por

$$|y_{k+1} - w_{k+1}| \leq \frac{hM}{2L} (e^{(t_{k+1}-a)L} - 1)$$

$$\text{donde} \begin{cases} M = \sup_{a \leq t \leq b} |y''(t)| \\ L \text{ es la constante de Lipschitz de } f(t, y) \text{ en } y \end{cases}$$

- El error del problema perturbado viene acotado por

$$|y(t_{k+1}) - \tilde{w}_{k+1}| \leq \frac{1}{L} \left(\frac{hM}{2} + \frac{\varepsilon}{h} \right) (e^{(t_{k+1}-a)L} - 1) + \varepsilon e^{(t_{k+1}-a)L}$$

- El error no disminuye indefinidamente con el valor de h



Ejemplo de acotación del error

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Met. Euler

Met. Taylor

Errores

- Acotación del error del método de Euler para la EDO

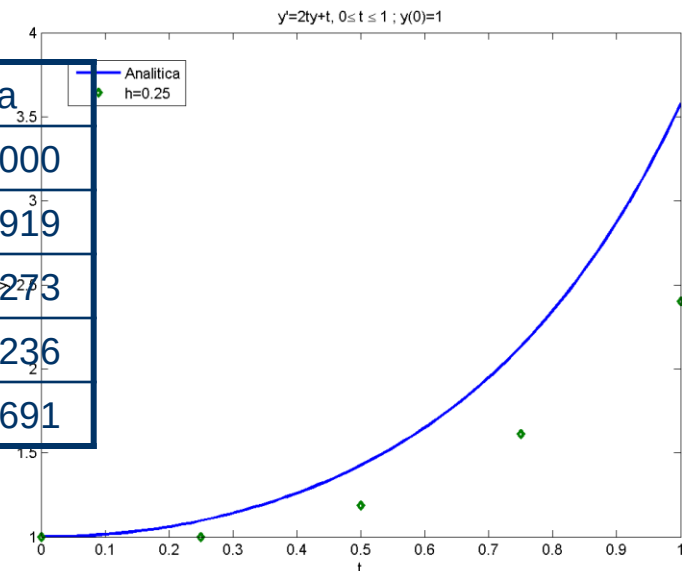
$$y' = t(2y+1) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0)=1 \rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{t^2}$$

- Error de truncamiento global con $h=0.25$

$$|y_k - w_k| \leq \frac{hM}{2L} (e^{(t_k-0)L} - 1) \leq \frac{0.25 \cdot 9e}{2 \cdot 2} (e^{2t_k} - 1)$$

$$\text{donde} \begin{cases} M = \sup_{0 \leq t \leq 1} |y''(t)| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |3e^{t^2} (1 + 2t^2)| \leq 3e(1+2) \\ \left| \frac{\partial}{\partial y} f(t, y) \right| = 2t \leq 2 = L \end{cases}$$

k	t	y	w	y-w	cota
0	0.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
1	0.25	1.0967	1.0000	0.0967	0.9919
2	0.50	1.4260	1.1875	0.2385	2.6273
3	0.75	2.1326	1.6094	0.5232	5.3236
4	1.00	3.5774	2.4004	1.1770	9.7691





Definiciones y tablas de Butcher

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos

- Logran la exactitud del método sin necesidad de calcular derivadas.
- Expresión General

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{m+1} = w_m + h \sum_{i=1}^s c_i k_i \quad k_i = f \left(t_m + p_m h, w_m + h \sum_{j=1}^{i-1} q_i^j k_j \right) \quad 1 \leq m \leq n \end{cases}$$

Donde c_i, p_i e q_i^j son constantes elegidas de forma adecuada

- Expresión mediante tablas de Butcher

p_1	0	<i>Explícitos</i>			
p_2	q_2^1	0	<i>(Matriz estrictam. triangular inferior)</i>		
p_3	q_3^1	q_3^2	0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	0	
p_n	q_n^1	q_n^2	$\cdots$	q_n^{n-1}	0
	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_n

0	0
	1

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{m+1} = w_m + h k_1 \quad 1 \leq m \leq n \\ k_1 = f(t_m, w_m) \end{cases}$$

p_1	q_1^1	q_1^2	q_1^3	$\cdots$	q_1^n	<i>Implícitos</i>
p_2	q_2^1	q_2^2	q_2^3	$\cdots$	q_2^n	
p_3	q_3^1	q_3^2	q_3^3	$\cdots$	q_{31}^n	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		
p_n	q_n^1	q_n^2	q_n^3	$\cdots$	q_n^n	
	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	c_n	

1	1
	1

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{m+1} = w_m + h k_1 \quad 1 \leq m \leq n \\ k_1 = f(t_m + h, w_m + h k_1) \end{cases}$$



Obtención de los coeficientes

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

- Los coeficientes se obtienen, una vez seleccionado el número de términos, por comparación con los métodos de Taylor
- El método con un solo término coincide con el de Euler
- El método es consistente cuando $p_i = \sum_{k=1}^{i-1} q_i^k \quad i = 2, \dots, n$
- Para cada orden hay infinitas formas de seleccionar el valor de los coeficientes (sistema no lineal indeterminado)
- Existe relación entre el número de evaluaciones por paso y el menor error local que en los métodos explícitos viene dado por (Butcher)

Evaluaciones (n)	1-4	5-7	8-9	>10
Error local	$O(h^n)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$	$O(h^{n-3})$

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos



Runge-Kutta explícito de orden 2

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Euler y Taylor
 - Mét. Runge-Kutta
 - Mét. Multipaso*
 - EDOs orden n*
 - Estables y rígidos*
 - Resumen
- Bibliografía
- Software

Fundamentos
Explícitos
Implícitos
Adaptativos

Orden 2



$$c_1 + c_2 = 1 \quad c_2 p_2 = c_2 q_2^1 = \frac{1}{2}$$

Heun

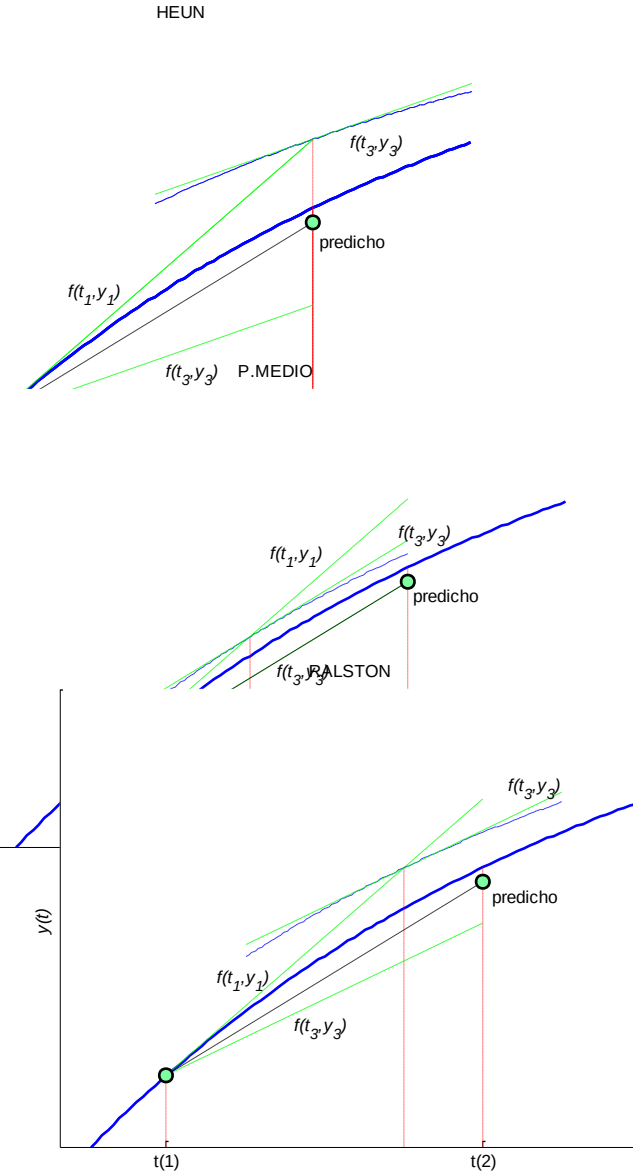
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} w_{n+1} = w_n + \frac{1}{2} h (k_1 + k_2) \\ k_1 = f(t_n, w_n) \\ k_2 = f(t_n + h, w_n + h k_1) \end{array} \right. \quad y(t)$$

Pto. Medio

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} w_{n+1} = w_n + h k_2 \\ k_1 = f(t_n, w_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{2} h, w_n + \frac{1}{2} h k_1) \end{array} \right. \quad y(t)$$

Ralston:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} w_{n+1} = w_n + h \left(\frac{1}{3} k_1 + \frac{2}{3} k_2 \right) \\ k_1 = f(t_n, w_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{3}{4} h, w_n + \frac{3}{4} h k_1) \end{array} \right. \quad y(t)$$





Runge-Kutta habituales de orden superior

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6} h (k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(t_n, w_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{2} h, w_n + \frac{1}{2} h k_1) \\ k_3 = f(t_n + h, w_n - h k_1 + 2h k_2) \end{array} \right. \quad \bullet \quad \text{Orden 3}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6} h (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(t_n, w_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{2} h, w_n + \frac{1}{2} h k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{1}{2} h, w_n + \frac{1}{2} h k_2) \\ k_4 = f(t_n + h, w_n + h k_3) \end{array} \right. \quad \bullet \quad \text{Orden 4}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & 0 & & & & \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{16} & 0 & 0 & \frac{9}{16} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{8}{7} \\ \hline & \frac{7}{90} & 0 & \frac{32}{90} & \frac{12}{90} & \frac{32}{90} & \frac{7}{90} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} w_{n+1} = w_n + \frac{1}{90} h (7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \\ k_1 = f(t_n, w_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{4} h, w_n + \frac{1}{4} h k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{1}{4} h, w_n + \frac{1}{8} h (k_1 + k_2)) \\ k_4 = f(t_n + \frac{1}{2} h, w_n + h (-\frac{1}{2} k_2 + k_3)) \\ k_5 = f(t_n + \frac{3}{4} h, w_n + h (\frac{3}{16} k_1 + \frac{9}{16} k_4)) \\ k_6 = f(t_n + h, w_n + h (-\frac{3}{7} k_1 + \frac{2}{7} k_2 + \frac{12}{7} k_3 - \frac{12}{7} k_4 + \frac{8}{7} k_5)) \end{array} \right. \quad \bullet \quad \text{Orden 5}$$

**Ejemplo (orden2):**

$$y' = -\frac{t}{y} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos

$$\begin{cases} w_0 = \alpha & k_1 = f(t_{i-1}, w_{i-1}) \\ w_i = w_{i-1} + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) & 1 \leq i \leq n \quad k_2 = f(t_{i-1} + ph, w_{i-1} + qhk_1) \end{cases}$$

• Heun

t_n	k_1	k_2	w_i
0.25	$(-\frac{0.0}{1.0}) = 0$	$(-\frac{0+0.25}{1+0}) = -0.25$	$1 + \frac{1}{2}(0.25)(0 - 0.25) = 0.9688$
0.50	$(-\frac{0.25}{0.9688}) = -0.2581$	$(-\frac{0.25+0.25}{0.9688+0.25(-0.2581)}) = -0.5530$	$0.9688 + \frac{1}{2}(0.25)(-2581 - 0.5530) = 0.8674$
0.75	$(-\frac{0.50}{0.8674}) = -0.5765$	$(-\frac{0.50+0.25}{0.8674+0.25(-0.5765)}) = -1.0370$	$0.8674 + \frac{1}{2}(0.25)(-0.5765 - 1.0370) = 0.6657$
1.00	$(-\frac{0.75}{0.6657}) = -1.1266$	$(-\frac{0.75+0.25}{0.6657+0.25(-1.1266)}) = -2.6039$	$0.6657 + \frac{1}{2}(0.25)(-1.1266 - 2.6039) = 0.1994$

• Punto medio

t_n	k_1	k_2	w_i
0.25	$0.25(-\frac{0.0}{1.0}) = 0$	$0.25(-\frac{0+0.25 \times 0.5}{1+0}) = -0.1250$	$1 + (0.25)(-0.1250) = 0.9688$
0.50	$0.25(-\frac{0.25}{0.9688}) = -0.2581$	$0.25(-\frac{0.25+0.25 \times 0.5}{0.9688+(0.25)(0.5)(-0.2581)}) = -0.4004$	$0.9688 + (0.25)(-0.4004) = 0.8686$
0.75	$0.25(-\frac{0.50}{0.8686}) = -0.5756$	$0.25(-\frac{0.50+0.25 \times 0.5}{0.8686+(0.25)(0.5)(-0.5756)}) = -0.7845$	$0.8686 + (0.25)(-0.7845) = 0.6725$
1.00	$0.25(-\frac{0.75}{0.6725}) = -1.1152$	$0.25(-\frac{0.75+0.25 \times 0.5}{0.6725+(0.25)(0.5)(-1.1152)}) = -1.6413$	$0.6725 + (0.25)(-1.6413) = 0.2622$

• Ralston

t_n	k_1	k_2	w_i
0.25	$(-\frac{0.0}{1.0}) = 0$	$(-\frac{0+\frac{3}{4} \times 0.25}{1+\frac{3}{4}(0.25)(0)}) = -0.1875$	$1 + \frac{1}{3}(0.25)(0 + 2(-0.1875)) = 0.9688$
0.50	$(-\frac{0.25}{0.9688}) = -0.2581$	$(-\frac{0.25+\frac{3}{4} \times 0.25}{0.9688-\frac{3}{4}(0.25)(-0.2581)}) = -0.4754$	$0.9688 + \frac{1}{3}(0.25)(-0.2581 + 2(-0.4754)) = 0.8680$
0.75	$(-\frac{0.50}{0.8680}) = -0.5760$	$(-\frac{0.50+\frac{3}{4} \times 0.25}{0.8680-\frac{3}{4}(0.25)(-0.5760)}) = -0.9046$	$0.8680 + \frac{1}{3}(0.25)(-0.5760 + 2(-0.9046)) = 0.6693$
1.00	$(-\frac{0.75}{0.6693}) = -1.1207$	$(-\frac{0.75+\frac{3}{4} \times 0.25}{0.6693+\frac{3}{4}(0.25)(-1.1207)}) = -2.0419$	$0.6704 + \frac{1}{3}(0.25)(-1.1207 + 2(-2.0419)) = 0.2355$



Ejemplo (orden >2): $y' = -\frac{t}{y}$ $0 \leq t \leq 1$ $y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

t_n	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	w_n
0.25	0.0000	-0.1250	-0.2667				0.9681
0.50	-0.2582	-0.4007	-0.6008				0.8655
0.75	-0.5777	-0.7879	-1.2176				0.6594
1.00	-1.1375	-1.6919	-10.2283				-0.0962
0.25	0.0000	-0.1250	-0.1270	-0.2582			0.9682
0.50	-0.2582	-0.4007	-0.4084	-0.5773			0.8669
0.75	-0.5774	-0.7873	-0.8142	-1.1322			0.6613
1.00	-1.1341	-1.6841	-1.9410	-5.6797			0.0753
0.25	0.0000	-0.0625	-0.0626	-0.1260	-0.1909	-0.2582	0.9682
0.50	-0.2582	-0.3282	-0.3290	-0.4045	-0.4865	-0.5775	0.8660
0.75	-0.5774	-0.6778	-0.6803	-0.8006	-0.9465	-1.1353	0.6614
1.00	-1.1339	-1.3758	-1.3936	-1.8041	-2.6440	-9.5117	0.0354

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos

y	E_{RK3}	E_{RK4}	E_{RK6}
0.9682	1.903×10^{-4}	2.711×10^{-6}	1.518×10^{-7}
0.8660	5.524×10^{-4}	1.706×10^{-5}	6.660×10^{-7}
0.6614	2.085×10^{-3}	1.218×10^{-4}	7.552×10^{-6}
0.0000	9.621×10^{-2}	7.531×10^{-2}	3.539×10^{-2}



Ejemplo (graficas): $y' = -\frac{t}{y} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0)=1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$

➤ Motivación

➤ Objetivos

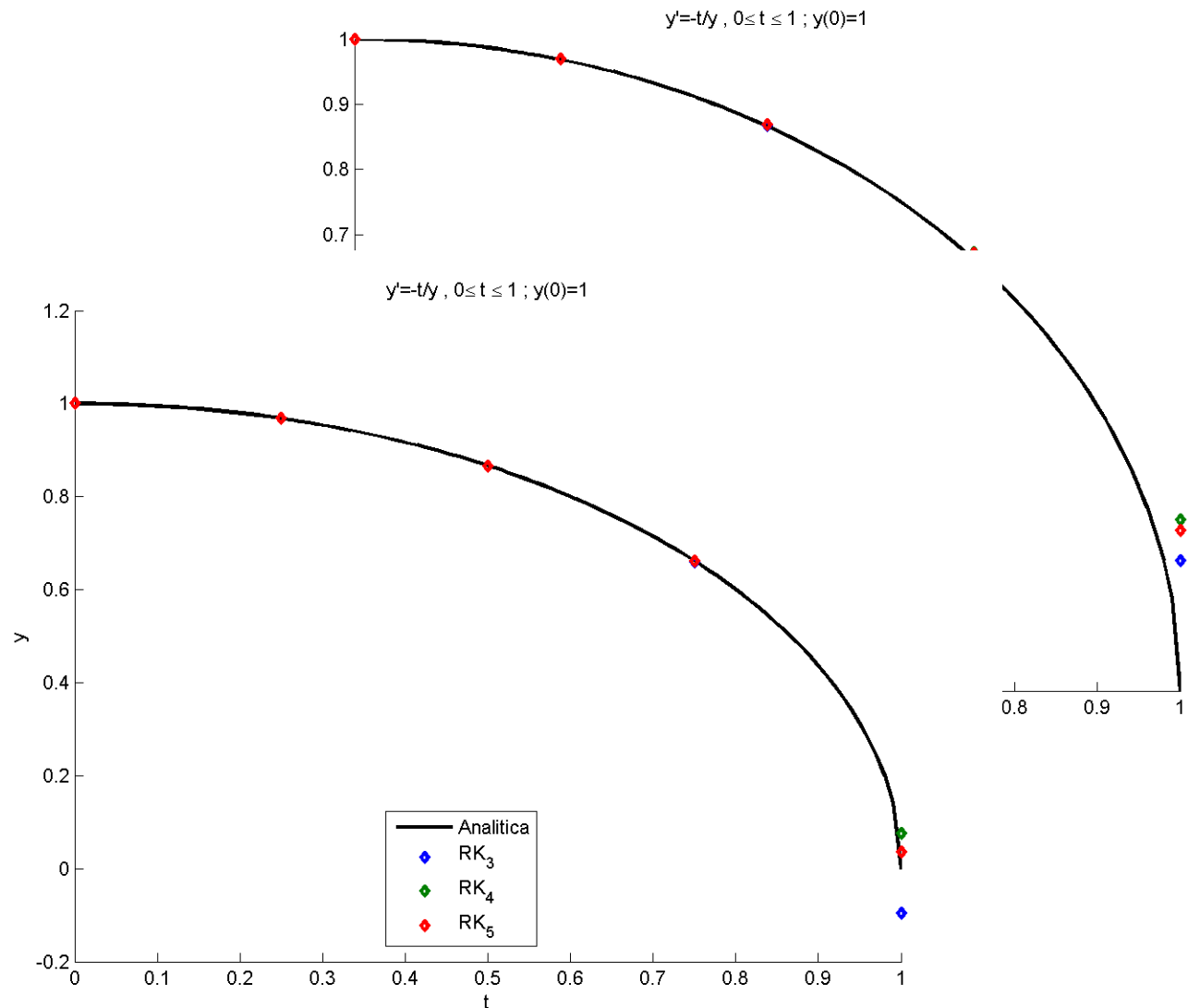
➤ Temario

- Introducción
- Mét. Euler y Taylor
- Mét. Runge-Kutta
- Mét. Multipaso*
- EDOs orden n^*
- Estables y rígidos*
- Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos
Explícitos
Implícitos
Adaptativos





Runge Kutta implícitos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

- Muy robustos
- Poco utilizados por plantear en cada paso un sistema de ecuaciones no lineales

Euler retrasado (orden 1)

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} w_{m+1} = w_m + hk_1 \\ k_1 = f(t_m + h, w_m + hk_1) \end{array} \right. \quad 1 \leq m \leq n$$

Lobato (orden 2)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} w_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)) \end{array} \right.$$

Lobato (orden 4)

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(t_n, w_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{h}{24}(5k_1 + 8k_2 - k_3)) \\ k_3 = f(t_n + h, w_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{8}{24} & -\frac{1}{24} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, w_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{h}{24}(5k_1 + 8k_2 - k_3)) \\ k_3 = f(t_n + h, w_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, w_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{h}{24}(5k_1 + 8k_2 - k_3)) \\ k_3 = f(t_n + h, w_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, w_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{h}{24}(5k_1 + 8k_2 - k_3)) \\ k_3 = f(t_n + h, w_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)) \end{array} \right.$$

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos



Ejemplo (orden 1): $y' = -\frac{t}{y} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos

- Euler retrasado
 - Planteamiento

$$w_0 = \alpha \quad w_{i+1} = w_i + hk_1 \quad k_1 = f(t_{i-1} + h, w_{i-1} + hk_1)$$

- Aplicación

$$w_0 = 1 \quad k_1 = -\frac{t_{i-1} + h}{w_{i-1} + hk_1} \quad w_{i+1} = w_i + hk_1$$

$$t_1 = 0.25 \quad k_1 = -\frac{0 + 0.25}{1 + (0.25)k_1} \rightarrow k_1 = -0.2649 \quad w_1 = 1 + (0.25)(-0.2649) = 0.9330$$

$$t_2 = 0.50 \quad k_1 = -\frac{0.25 + 0.25}{0.9330 + (0.25)k_1} \rightarrow k_1 \notin \mathbb{R} \quad k_1 = -1.5417 \pm 0.7894i$$

- Lobato
 - Planteamiento

$$w_0 = \alpha \quad w_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2) \quad k_1 = f(t_n, y_n) \quad k_2 = f(t_n + h, y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2))$$

- Aplicación

$$w_0 = 1 \quad k_1 = -\frac{t_{i-1}}{w_{i-1}} \quad k_2 = -\frac{t_{i-1} + h}{w_{i-1} + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)} \quad w_i = w_{i-1} + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)$$

$$t_1 = 0.25 \quad k_1 = -\frac{0}{1} = 0 \quad k_2 = -\frac{0 + 0.25}{1 + \frac{1}{2}(0.25)(0 + k_2)} \rightarrow k_2 = -0.2583 \quad w_1 = 0.9677$$

$$t_2 = 0.50 \quad k_1 = -0.2583 \quad k_2 = -\frac{0.25 + 0.25}{0.9677 + \frac{1}{2}(0.25)(-0.2583 + k_2)} \rightarrow k_2 = -0.5794 \quad w_2 = 0.8630$$

$$t_3 = 0.75 \quad k_1 = -0.5794 \quad k_2 = -\frac{0.5 + 0.25}{0.8630 + \frac{1}{2}(0.25)(-0.5794 + k_2)} \rightarrow k_2 = -1.1623 \quad w_3 = 0.6453$$

$$t_3 = 1.00 \quad k_1 = -1.1623 \quad k_2 = -\frac{0.75 + 0.25}{0.6453 + \frac{1}{2}(0.25)(-1.1623 + k_2)} \rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{R}$$



Runge Kutta adaptativos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos

- El tamaño de paso depende de la estimación del error de truncamiento local δ_{actual}
- Algoritmo
 - Obtener el valor de w_{n+1} de dos formas diferentes
 - Estimar a partir de ambas δ_{actual}
 - Comparar δ_{actual} con la tolerancia δ
 - $\delta_{\text{actual}} \geq \delta \rightarrow$ Estimación de w_{n+1} inválida, modificar h y repetir el proceso
 - $\delta_{\text{actual}} < \delta \rightarrow$ Estimación de w_{n+1} válida, modificar h y calcular el nuevo término
- Selección de la tolerancia
 - Error absoluto $\delta = \varepsilon$
 - Error relativo $\delta = \varepsilon y_{\text{escala}}$ donde $y_{\text{escala}} = |y| + |hy'|$
- Obtención de w
 - RK del mismo orden con mitad de paso
 - Combinar dos métodos RK de orden n y $n+1$



Adaptación del tamaño del paso

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos

• Métodos

- RK mismo orden con semipaso (RK4)

$$\delta_{actual} = \left| \tau_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) \right| \approx \frac{1}{15h} \left(w_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) - w_n(h) \right)$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{15h\delta}{\left| w_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) - w_n(h) \right|}}$$

- Combinación de RK de orden k y (k+1)

$$\delta_{actual} = \tau_{n+1}^k(h) = \frac{1}{h} \left| w_{n+1}^{k+1} - w_{n+1}^k \right|$$

$$q = \sqrt[k]{\frac{\delta h}{\left| w_{n+1}^{k+1} - w_{n+1}^k \right|}}$$

• Modificación de h:

- La modificación viene dada por $h_{nuevo} = qh_{antiguo}$
- A efectos prácticos, se imponen cotas superiores e inferiores al tamaño del paso, así como porcentajes máximos y mínimos de variación

$$- \begin{cases} q < \Delta h_{\min} & h_{nuevo} = h \cdot \Delta h_{\min} \\ \Delta h_{\min} \leq q \leq \Delta h_{\max} & h_{nuevo} = qh \\ q > \Delta h_{\max} & h_{nuevo} = h \cdot \Delta h_{\max} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} h_{nuevo} < h_{\min} & h_{nuevo} = h_{\min} \\ h_{nuevo} > h_{\max} & h_{nuevo} = h_{\max} \\ w_k + h_{nuevo} > b & h_{nuevo} = b - w_k \end{cases}$$

[Demo](#)

[Demo](#)



Runge Kutta Adaptativos de orden bajo

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos

● RK 1-2 (Euler-Heun)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + k_1 \\ z_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_1 = hf(t_n, y_n) \\ k_2 = hf(t_n + h, y_n + k_1) \end{array} \right.$$

● RK 2-3 (Bogacki-Shampine)

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \\ 1 & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \left(\frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3\right) \\ z_{n+1} = y_n + \left(\frac{7}{24}k_1 + \frac{1}{4}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{8}k_4\right) \\ k_1 = hf(t_n, y_n) \\ k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 = hf\left(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}k_2\right) \\ k_4 = hf\left(t_n + h, y_n + \frac{2}{9}k_1 + \frac{3}{9}k_2 + \frac{4}{9}k_3\right) \end{array} \right.$$



Runge Kutta Adaptativos de orden 4-5

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos

Felhberg (minimiza el error de RK4)

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	
$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$		
$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$	

Cash-Karp

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			
1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		
$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	
$\frac{2825}{27648}$	0	$\frac{18575}{48384}$	$\frac{13525}{55296}$	$\frac{277}{14336}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{37}{378}$	0	$\frac{250}{621}$	$\frac{125}{594}$	0	$\frac{512}{1771}$	

Dormand-Prince
(minimiza el error de RK5)

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$			
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$		
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$	
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$
$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$



Adaptación del tamaño del paso: Ejemplo 1

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos

- Runge Kutta de orden 4 $y' = -\frac{t}{y}$ $0 \leq t \leq 1$ $y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$

- Estimación del error

$$\delta_{actual} = \left| \tau_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) \right| \approx \frac{1}{15h} \left(w_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) - w_n(h) \right)$$

- Error de truncamiento local: 0.005

- Paso máximo, mínimo e inicial: 0.5 ,0.001 y 0.25

- Factor de incremento y decremento del paso: 1.25 y 0.75

Tiempo	h	w(h/2)	w(h)	delta
0.0000E+000	2.5000E-001	9.6825E-001	9.6824E-001	6.7509E-007
2.5000E-001	3.1250E-001	8.2679E-001	8.2675E-001	1.0205E-005
5.6250E-001	3.9063E-001	3.0130E-001	2.9922E-001	3.5360E-004
9.5313E-001	4.6875E-002	1.2798E-002	2.6336E-002	1.9253E-002
9.5313E-001	3.5156E-002	1.5003E-001	1.4982E-001	4.0881E-004
9.8828E-001	1.1719E-002	-2.0621E-002	-6.7033E-004	1.1350E-001
9.8828E-001	8.7891E-003	7.1107E-002	7.0990E-002	8.8438E-004
9.9707E-001	2.9297E-003	1.4752E-002	-2.5657E-001	6.1741E+000
9.9707E-001	2.1973E-003	2.5827E-002	2.5768E-002	1.7730E-003
9.9927E-001	7.3242E-004	2.1298E-002	4.3152E-002	1.9893E+000

Warning: Alcanzado el valor máximo del paso

Ultimo paso: $t_{fin} - t_n$



Adaptación del tamaño del paso: Ejemplo 2

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Explícitos

Implícitos

Adaptativos

● Runge-Kutta-Fehlberg: RK5 – RK4

- Estimación del error

$$\delta_{actual} = \tau_{n+1}^4(h) = \frac{1}{h} |w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4|$$

- Error de truncamiento local: 0.005
- Paso máximo, mínimo e inicial: 0.5 ,0.001 y 0.25
- Factor de incremento y decremento del paso: 1.25 y 0.75

Tiempo	h	w5 (h)	w4 (h)	delta
0.0000E+000	2.5000E-001	9.6825E-001	9.6825E-001	2.0317E-007
2.5000E-001	3.1250E-001	8.2680E-001	8.2680E-001	8.5413E-006
5.6250E-001	3.9063E-001	3.0194E-001	3.0167E-001	6.9758E-004
9.5313E-001	4.6875E-002	2.7866E-002	2.7414E-002	9.6444E-003
9.5313E-001	3.5156E-002	1.5137E-001	1.5137E-001	3.1537E-005
9.8828E-001	1.1719E-002	7.5700E-003	7.3305E-003	2.0436E-002
9.8828E-001	8.7891E-003	7.3901E-002	7.3901E-002	1.1025E-005
9.9707E-001	2.9297E-003	-1.5090E-002	-1.4923E-002	5.6798E-002
9.9707E-001	2.1973E-003	3.2772E-002	3.2770E-002	9.4326E-004
9.9927E-001	7.3242E-004	1.0766E-001	1.1234E-001	6.3835E+000

Warning: Alcanzado el valor máximo del paso

Ultimo paso: $t_{fin} - t_n$



Fundamentos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Adams-Bashford

Adams-Moulton

Predictor-Corrector

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \rightarrow$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

$$w_{n+1} = w_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t) dt \quad \text{donde } P(t) \text{ es un polinomio de interpolación}$$

- Un método multipaso de paso m (con $m > 1$) para resolver la EDO anterior es aquel cuya ecuación en diferencias para obtener la aproximación en t_{n+1} se puede representar mediante
$$w_{i+1} = \sum_{k=1}^m a_k w_{(i+1)-k} + h \sum_{k=0}^m b_k f(t_{(i+1)-k}, w_{(i+1)-k})$$
donde los valores a_k y b_k son constantes y se dispone de los valores iniciales w_k .
- Si $b_0 = 0$ se denomina explícito: el siguiente término se calcula directamente (Adams-Bashford)
- Si $b_0 \neq 0$ se denomina implícito: es necesario resolver una ecuación no lineal para obtener la aproximación (Adams-Moulton)
- Inconvenientes:
 - Necesita valores iniciales que deben obtenerse mediante otros métodos
 - Existen dificultades cuando se plantea con paso variable (se deben recalcular los pasos anteriores)
 - Problemas de convergencia en los métodos implícitos



Obtención de métodos (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Adams-Bashford

Adams-Moulton

Predictor-Corrector

• Adams Bashford (explícitas o abiertas)

$$w_{n+1} = w_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t) dt \quad \text{con} \quad P_{m-1}(t) \leftarrow \left\{ t_{(i+1)-k}, f(t_{(i+1)-k}, w_{(i+1)-k}) \right\}_{k=1}^m$$

$$f(t, y(t)) = P_{m-1}(t) + \frac{f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))}{m!} (t - t_i)(t - t_{i-1}) \cdots (t - t_{i+1-m})$$

– El método de Adams Bashford con paso coincide con método de Euler

• Adams Moulton (implícitas o cerradas)

$$w_{n+1} = w_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t) dt \quad \text{con} \quad P_{m-1}(t) \leftarrow \left\{ t_{(i+1)-k}, f(t_{(i+1)-k}, w_{(i+1)-k}) \right\}_{k=0}^m$$

$$f(t, y(t)) = P_m(t) + \frac{f^{(m+1)}(\xi_i, y(\xi_i))}{(m+1)!} (t - t_{i+1})(t - t_i)(t - t_{i-1}) \cdots (t - t_{i+1-m})$$

• El error de truncamiento local de un método multipaso

$$w_{i+1} = \sum_{k=1}^m a_k w_{(i+1)-k} + h \sum_{k=0}^m b_k f(t_{(i+1)-k}, w_{(i+1)-k})$$

viene dado por

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - \sum_{k=1}^m a_k y(t_{(i+1)-k})}{h} + \sum_{k=0}^m b_k f(t_{(i+1)-k}, w_{(i+1)-k})$$



Obtención de métodos (II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Adams-Bashford

Adams-Moulton

Predictor-Corrector

● Adams Bashford de n pasos

n	Formula	$\tau_{i+1}(h)$
2	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}h \left[3f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) \right]$	$\frac{5}{12}h^2 y'''(\mu)$
3	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{12}h \left[23f(t_i, w_i) - 16f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, w_{i-2}) \right]$	$\frac{3}{8}h^3 y^{iv}(\mu)$
4	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{24}h \left[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3}) \right]$	$\frac{251}{720}h^4 y^v(\mu)$
5	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{720}h \left[1901f(t_i, w_i) - 2774f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2616f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 1274f(t_{i-3}, w_{i-3}) + 251f(t_{i-4}, w_{i-4}) \right]$	$\frac{95}{288}h^5 y^{vi}(\mu)$

● Adams Moulton de n pasos

n	Fórmula	$\tau_{i+1}(h)$
1	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}h \left[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i) \right]$	$\frac{-1}{12}h^2 y'''(\mu)$
2	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{12}h \left[5f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) \right]$	$\frac{1}{-24}h^3 y^{iv}(\mu)$
3	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{24}h \left[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2}) \right]$	$\frac{-19}{720}h^4 y^v(\mu)$
4	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{720}h \left[251f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 646f(t_i, w_i) - 264f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 106f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 19f(t_{i-3}, w_{i-3}) \right]$	$\frac{-3}{160}h^5 y^{vi}(\mu)$



Ejemplo multipaso

$$y' = -\frac{t}{y} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

Fundamentos

Adams-Bashford

Adams-Moulton

Predictor-Corrector

- Se utiliza Runge Kutta de orden 4 para arrancar el método y se toma $h=0.25$
 $w_0 = 1 \quad w_1^{RK4} = 0.9682$

- Adams Bashford de 2 pasos

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{2}h \left[3f(t_1, w_1) - f(t_0, w_0) \right] = 0.9682 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.25}{0.9682} - \frac{-0}{1} \right] = 0.8714$$

$$w_3 = w_2 + \frac{1}{2}h \left[3f(t_2, w_2) - f(t_1, w_1) \right] = 0.8714 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.5}{0.8714} - \frac{-0.25}{0.9682} \right] = 0.6885$$

$$w_4 = w_3 + \frac{1}{2}h \left[3f(t_3, w_3) - f(t_2, w_2) \right] = 0.6885 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.75}{0.6885} - \frac{-0.5}{0.8714} \right] = 0.3518$$

- Adams Moulton de 1 paso $w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}h \left[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i) \right]$

$$w_1 = 1 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-0.25}{w_1} + \frac{-0}{1} \right] \rightarrow w_1 = 1 + 0.125 \frac{-0.25}{w_1} \Rightarrow w_1 = 0.9677 \{ 0.0322 \}$$

$$w_2 = 0.9677 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-0.5}{w_2} + \frac{-0.25}{0.9677} \right] = 0.9677 + 0.125 \left(\frac{-0.5}{w_2} - 0.2583 \right) \Rightarrow w_2 = 0.8630 \{ 0.0724 \}$$

$$w_3 = 0.8630 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-0.75}{w_3} + \frac{-0.5}{0.8630} \right] = 0.8630 + 0.125 \left(\frac{-0.75}{w_3} - 0.5794 \right) \Rightarrow w_3 = 0.6453 \{ 0.1452 \}$$

$$w_4 = 0.6453 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-1.0}{w_4} + \frac{-0.75}{0.6453} \right] = 0.6453 + 0.125 \left(\frac{-1.0}{w_4} - 0.1623 \right) \Rightarrow w_4 = \{ 0.25 \pm 0.25i \}$$

- Adams Moulton de 2 pasos $w_{i+1} = w_i + \frac{1}{12}h \left[5f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) \right]$

$$w_1 = w_1^{RK4} = 0.9682$$

$$w_2 = 0.9682 + \frac{1}{12}0.25 \left[5 \frac{-0.5}{w_2} + 8 \frac{-0.25}{0.9682} - \frac{-0.00}{1.000} \right] = 0.9682 + 0.0208 \left(\frac{-2.5}{w_2} - 2.0656 \right) \Rightarrow w_2 = 0.8650 \{ 0.0602 \}$$

$$w_3 = 0.8650 + \frac{1}{12}0.25 \left[5 \frac{-0.75}{w_3} + 8 \frac{-0.5}{0.8650} - \frac{-0.25}{0.9682} \right] = 0.8650 + 0.0208 \left(\frac{-3.75}{w_3} - 4.3661 \right) \Rightarrow w_3 = 0.6547 \{ 0.1193 \}$$

$$w_4 = 0.6547 + \frac{1}{12}0.25 \left[5 \frac{-1.0}{w_4} + 8 \frac{-0.75}{0.6547} - \frac{-0.5}{0.8650} \right] = 0.6547 + 0.0208 \left(\frac{-5.0}{w_4} - 8.5862 \right) \Rightarrow w_4 = \{ 0.2379 \pm 0.2181i \}$$



Predictor corrector

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

- Los métodos implícitos no se plantean directamente debido a sus dificultades.
- Se usan para mejorar los resultados obtenidos por un método explícito
 - Explícito: predictor
 - Implícito: corrector
- Ejemplo: predictor corrector de 2º orden (truncamiento local h^2) con $h=0.25$

$$y' = -\frac{t}{y} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

$$\text{predictor} \quad w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}h \left[3f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) \right]$$

$$\text{corrector} \quad w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}h \left[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i) \right]$$

$$w_1 = w_1^{RK4} = 0.9682$$

$$w_2^p = 0.9682 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.25}{0.9682} - \frac{-0}{1} \right] = 0.8714 \quad w_2^c = 0.9682 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-0.5}{0.8714} + \frac{-0.25}{0.9677} \right] = 0.8642$$

$$w_3^p = 0.8642 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.50}{0.8642} - \frac{-0.25}{0.9682} \right] = 0.6796 \quad w_3^c = 0.8642 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-0.75}{0.6796} + \frac{-0.5}{0.8642} \right] = 0.6540$$

$$w_4^p = 0.6540 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.75}{0.6540} - \frac{-0.50}{0.8642} \right] = 0.2962 \quad w_4^c = 0.6540 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-1.0}{0.2962} + \frac{-0.75}{0.6540} \right] = 0.0886$$

Fundamentos

Adams-Bashford

Adams-Moulton

Predictor-Corrector



Representación

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

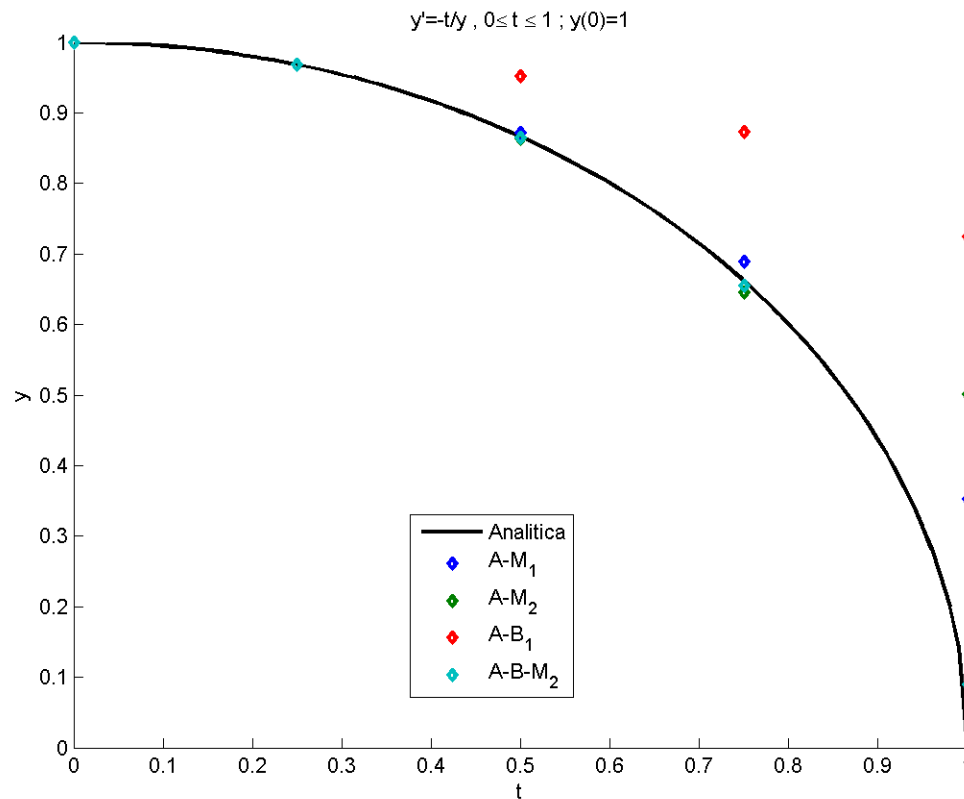
➤ Software

Fundamentos

Adams-Bashford

Adams-Moulton

Predictor-Corrector





Ejemplo: Comparativa (I)

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Euler y Taylor
 - Mét. Runge-Kutta
 - Mét. Multipaso*
 - EDOs orden n^*
 - Estables y rígidos*
 - Resumen
- Bibliografía
- Software

	$t_0=0.00$	$t_1=0.25$	$t_2=0.50$	$t_3=0.75$	$t_4=1.00$
Exacta	1.0000	0.9682	0.8660	0.6614	0.0000
Taylor (1)	1.0000	1.0000	0.9375	0.8042	0.5710
Taylor (2)	1.0000	0.9688	0.8698	0.6783	0.2995
Taylor (3)	1.0000	0.9688	0.8675	0.6675	0.2361
Taylor (4)	1.0000	0.9683	0.8662	0.6631	0.1990
R-K (2) Euler	1.0000	0.9688	0.8674	0.6657	0.1994
R-K (2) P.Medio	1.0000	0.9688	0.8682	0.6725	0.2622
R-K (2) Heun	1.0000	0.9688	0.8682	0.6704	0.2453
R-K (3)	1.0000	0.9681	0.8655	0.6594	-0.0962
R-K (4)	1.0000	0.9682	0.8660	0.6613	0.0753
R-K (5)	1.0000	0.9682	0.8660	0.6614	0.0354
A-Bashford (2)	1.0000	0.9682	0.8714	0.6885	0.3518
A-Moulton (1)	1.0000	0.9677	0.8630	0.6453	?
A-Moulton (2)	1.0000	0.9682	0.8650	0.6547	?
A-B(2)-M(1)	1.0000	0.9682	0.8642	0.6540	0.0886



Ejemplo: Comparativa de errores(II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

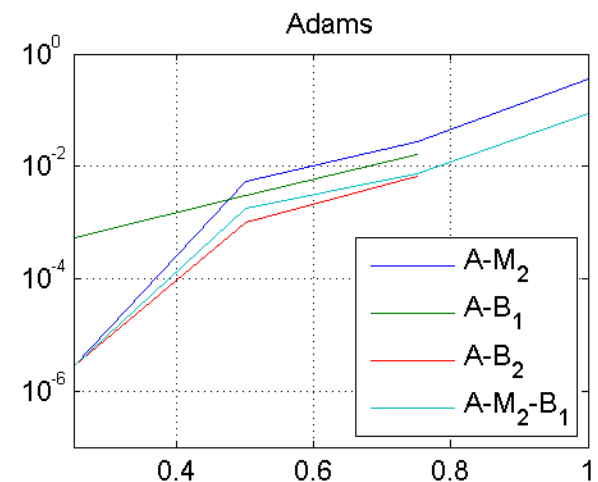
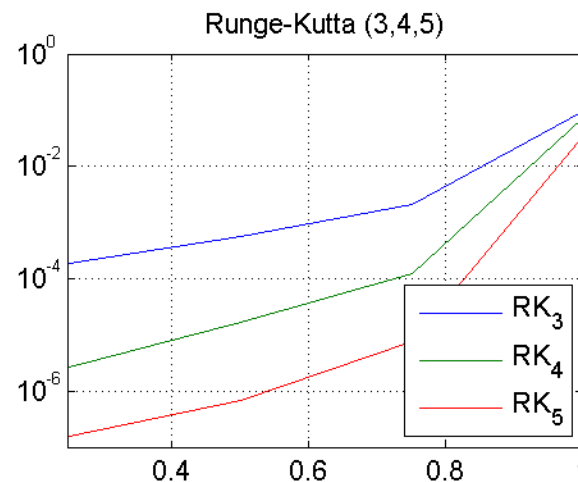
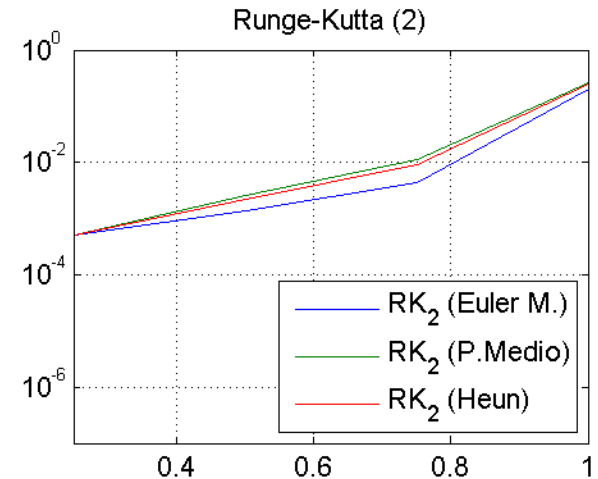
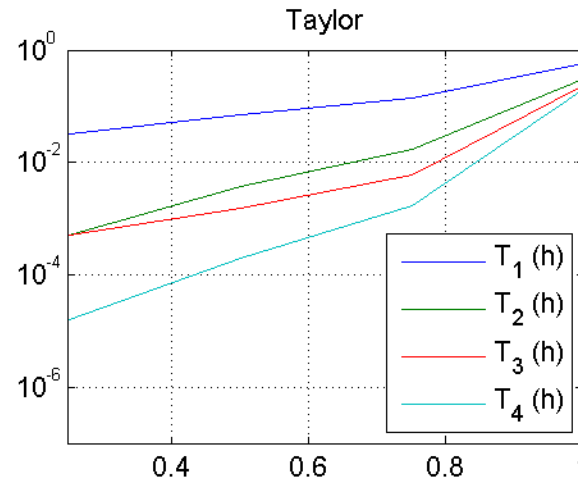
➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software





Fundamento

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

- Dada la EDO
$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

¿Qué condición debe cumplir para que el método de Euler sea estable? ¿Y convergente?

Sistema rígido es aquel cuya solución combina componentes con variación muy rápida (habitualmente transitorios), con otros de variación lenta (que determinan el régimen permanente).

- Los fenómenos transitorios pueden determinar el tamaño del paso para toda la solución



Resumen

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Euler y Taylor
 - Mét. Runge-Kutta
 - Mét. Multipaso*
 - EDOs orden n^*
 - Estables y rígidos*
 - Resumen
- Bibliografía
- Software



Bibliografía comentada

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Euler y Taylor
 - Mét. Runge-Kutta
 - Mét. Multipaso*
 - EDOs orden n^*
 - Estables y rígidos*
 - Resumen
- Bibliografía
- Software



Instrucciones

Válidas en Matlab (M), Octave (O) o ambos (B)

O	daspk	Solve differential-algebraic equation using Petzold's solver
O	dassl	Solve differential-algebraic equation using Petzold's solver with with constraints (stopping conditions)
O	dasrt	Solve differential-algebraic equation using Petzold's solver with with functional stopping criteria (root solving).
M	decic	Compute consistent initial conditions for ode15
M	ldeval	Evaluate solution of differential equation problem
O	lsode	solve ODEs using Hindmarsh's solver
M	ode15i	Solve fully implicit differential equations, variable order method
M	odeXX, odeXXs, odeXXt, odeXXtb	Solve initial value problems for ordinary differential equations using differents solvers. ode23, ode45, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb
M	odefile	Define differential equation problem for ordinary differential equation solvers
M	odeget	Ordinary differential equation options parameters
M	odeset	Create or alter options structure for ordinary differential equation solvers
M	odextend	Extend solution of initial value problem for ordinary differential equation

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n^*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software



Anexos

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Euler y Taylor
 - Mét. Runge-Kutta
 - Mét. Multipaso*
 - EDOs orden n^*
 - Estables y rígidos*
 - Resumen
- Bibliografía
- Software

- Demostraciones y desarrollos



Runge Kutta de Orden 2

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

- La expresión del método de orden 2 viene dada por

[Volver](#)

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(h, t_n, y_n) \text{ donde } \varphi(h, t_n, y_n) = c_1 k_1 + c_2 k_2$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) =$$

$$= \left\{ f + \frac{1}{1!}(\alpha hf_t + \beta k_1 f_y) + \frac{1}{2!}(\alpha^2 h^2 f_{tt} + 2\alpha h \beta k_1 f_{ty} + \beta^2 k_1^2 f_{yy}) + o(h^2) \right\} =$$

$$= \left\{ f + \frac{1}{1!}(\alpha hf_t + \beta h f f_y) + \frac{1}{2!}(\alpha^2 h^2 f_{tt} + 2\alpha \beta h^2 f f_{ty} + \beta^2 h^2 f^2 f_{yy}) + o(h^2) \right\} =$$

$$= f + h(\alpha f_t + \beta f f_y) + h^2\left(\frac{1}{2}\alpha^2 f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{1}{2}\beta^2 f^2 f_{yy}\right) + o(h^2)$$

$$y_{n+1} = y_n + (c_1 + c_2)hf + c_2\left\{h^2(\alpha f_t + \beta f f_y) + h^3\left(\frac{1}{2}\alpha^2 f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{1}{2}\beta^2 f^2 f_{yy}\right) + o(h^3)\right\}$$

- Comparando con el desarrollo de Taylor

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{y'_n}{1!} + h^2 \frac{y''_n}{2!} + h^3 \frac{y'''(\xi)}{3!} = y_n + hf \frac{h^2}{2} f' + h^3 \frac{y'''(\xi)}{3!} = y_n + hf + \frac{h^2}{2} \{f_t + f_y f\} + O(h^3)$$

- Igualando coeficientes se obtiene

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_2 \alpha = c_2 \beta = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6} \left\{ f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_y f_t + (f_y)^2 f \right\} \stackrel{!}{=} c_2 \left(\frac{1}{2} \alpha^2 f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{1}{2} \beta^2 f^2 f_{yy} \right)?$$

- Familia de soluciones dependientes de un parámetro: Heun, Punto medio, Ralston

$$c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \{c_1 = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = 1\} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad k_1 = hf(t_n, y_n) \quad k_2 = hf(t_n + h, y_n + k_1)$$

$$c_2 = 1 \Rightarrow \{c_1 = 0, \alpha = \beta = \frac{1}{2}\} \quad y_{n+1} = y_n + k_2 \quad k_1 = hf(t_n, y_n) \quad k_2 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$c_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \{c_1 = \frac{1}{3}, \alpha = \beta = \frac{3}{4}\} \quad y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) \quad k_1 = hf(t_n, y_n) \quad k_2 = hf(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}k_1)$$



Paso variable: Runge Kutta orden 4

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

● Estimación del error

$$\left. \begin{aligned} w_n(h) &= w_{n-1} + h\phi_4(t_{n-1}, w_{n-1}, h) + O(h^4) \\ w_{2n-1}(h/2) &= w_{n-1} + h\phi_4(t_{n-1}, w_{n-1}, h/2) + O(h/2^4) \\ w_{2n}(h/2) &= w_{2n-1} + h\phi_4(t_{n-1} + h/2, w_{2n-1}, h/2) + O(h/2^4) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \tau_n(h) = \frac{y(t_n) - w_n}{h} \\ \tau_{2n}(h/2) = \frac{y(t_n) - w_{2n}(h/2)}{h} \end{cases}$$

● Hipótesis: parte principal del error

$$\tau_n^4(h) = ch^4 + o(h^4) \rightarrow \begin{cases} y(t_n) - w_n(h) = h\tau_n(h) = ch^5 + o(h^5) \\ y(t_n) - w_{2n}(h/2) = h\tau_{2n}(h/2) = c\frac{1}{16}h^5 + o(h^5) \end{cases}$$

$$w_{2n}(h/2) - w_n(h) = ch^5\left(1 - \frac{1}{16}\right) + o(h^5) \Rightarrow c\frac{1}{16}h^5 \approx \frac{1}{15}\left(w_{2n}(h/2) - w_n(h)\right)$$

$$|\tau_{2n}(h/2)| = \left| \frac{y(t_n) - w_{2n}(h/2)}{h} \right| \approx \frac{1}{15h}\left(w_{2n}(h/2) - w_n(h)\right)$$



Paso variable: Runge Kutta Fehlberg

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Euler y Taylor

➤ Mét. Runge-Kutta

➤ Mét. Multipaso*

➤ EDOs orden n*

➤ Estables y rígidos*

➤ Resumen

➤ Bibliografía

➤ Software

● Estimación del error

$$\left. \begin{aligned} w_{n+1}^4 &= w_n + h\phi_4(t_n, w_n, h) + O(h^4) \\ w_{n+1}^5 &= w_n + h\phi_5(t_n, w_n, h) + O(h^5) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \tau_{n+1}^4(h) = \frac{y(t_{n+1}) - w_{n+1}^4}{h} \\ \tau_{n+1}^5(h) = \frac{y(t_{n+1}) - w_{n+1}^5}{h} \end{cases}$$

$$\tau_{n+1}^4(h) = \frac{1}{h}(y(t_{n+1}) \pm w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4) = \tau_{n+1}^5(h) + \frac{1}{h}(w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4) \approx \frac{1}{h}(w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4)$$

● Hipótesis: parte principal del error

$$\tau_{n+1}^4(h) = ch^4 + o(h^4) \rightarrow \tau_{n+1}^4(qh) \approx c(qh)^4 = q^4 \tau_{n+1}^4(h) \approx q^4 \frac{1}{h}(w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4)$$

● Cálculo del nuevo tamaño del paso

$$q^4 \frac{1}{h} |w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4| < \delta \rightarrow q < \sqrt[4]{\frac{\delta h}{|w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4|}}$$