

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 1 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Se considera el P.V.I. $y'(t) = -y + 1$ $0 \leq t \leq 1$ con $y(0) = y_0$

- Calcular la solución analítica exacta
- Determinar, en función de la condición inicial y del paso h , la expresión del valor aproximado w_k utilizando el método de Euler.
- Demostrar que la solución aproximada tiende a la exacta cuando se aumenta el número de intervalos.
- Calcular el valor del tamaño de paso h para, usando aritmética exacta, poder asegurar un error menor que 0.1 cuando se toma $y_0 = 0$. Verificar que los 2 primeros términos verifican la cota de error. ¿Qué ocurre si se toma $y_0 = 1$?

Apartado (a) Solución analítica exacta

La ecuación es lineal de primer orden, de la forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \quad \frac{d}{dt} \left(e^{\int p(t)dt} y \right) = q(t) e^{\int p(t)dt}$$

Cuya solución se obtiene integrando

$$e^t y = \int e^t dx = e^t + cte$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = y_0$ se llega a $y(t) = 1 + (y_0 - 1)e^{-t}$

Apartado (b) Aproximación utilizando Euler

El Método de Euler para el P.V.I. $y'(t) = f(t, y)$ $a \leq t \leq b$ con $y(a) = \alpha$ se escribe como:

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{con } w_0 = \alpha \text{ y } h = \frac{b-a}{n}.$$

En este caso se tiene que $f(t_k, w_k) = -w_k + 1$ y por tanto $w_{k+1} = w_k + h(-w_k + 1) = w_k(1-h) + h$

Por inducción

$$\left. \begin{aligned} w_{k+1} &= h + (1-h)w_k \\ w_k &= h + (1-h)w_{k-1} \\ &\vdots \\ w_1 &= h + (1-h)w_0 \end{aligned} \right\} w_{k+1} = h + (1-h)[h + (1-h)w_{k-1}] = \dots = h[1 + (1-h) + \dots + (1-h)^k] + (1-h)^{k+1}w_0$$

y por tanto

$$w_n = h \frac{(1-h)^n - 1}{(1-h) - 1} + (1-h)^n w_0 = (1-h)^n (w_0 - 1) + 1$$

Apartado (c) Convergencia del Método

$$\lim_{h \rightarrow 0} w_n = \lim_{h \rightarrow 0} \left[(1-h)^{\frac{-1}{h}} \right]^{a-b} (w_0 - 1) + 1 = e^{a-b} (w_0 - 1) + 1 = 1 + (w_0 - 1)e^{-1}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 2 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (d) Tamaño del paso (Sin errores de redondeo)

Sabemos que $|y(t_n) - w_n| \leq \frac{hM}{2L} (e^{(t_n-a)L} - 1)$, siendo L la constante de Lipschitz y M la cota de $y''(t)$.

La constante de Lipschitz se calcula como:

$$\forall y_1, y_2 : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \text{ de donde } |(-y_1 + 1) - (-y_2 + 1)| \leq |y_1 - y_2| \Rightarrow L = 1.$$

Tomando $y_0 = 0$ la solución es $y(t) = 1 - e^{-t}$, y su derivada segunda viene acotada por $M = e^0 = 1$. Por tanto

$$|y(t_n) - w_n| \leq \frac{h}{2} (e^1 - 1) \leq 0.1 \rightarrow h \leq 0.116 \text{ y tomamos } h = 0.1.$$

Calculamos todos los términos:

t_n	$y(t_n) = 1 - e^{-t_n}$	$w_n = 1 - (1 - h)^n$	$ y(t_n) - w_n $	$\frac{h}{2}(e^{t_n} - 1)$
0	0	0	0	
0.1	0.09516258196	0.1	0.004837418036	0.005258545904
0.2	0.1812692469	0.19	0.008730753078	0.01107013791
0.3	0.2591817793	0.271	0.01181822068	0.01749294038
0.4	0.329679954	0.3439	0.01422004604	0.02459123488
0.5	0.3934693403	0.40951	0.01604065971	0.03243606354
0.6	0.4511883639	0.468559	0.01737063609	0.04110594002
0.7	0.5034146962	0.5217031	0.01828840379	0.05068763537
0.8	0.5506710359	0.56953279	0.01886175412	0.06127704642
0.9	0.5934303403	0.612579511	0.01914917074	0.07298015556
1.0	0.6321205588	0.6513215599	0.01920100107	0.08591409142

Tomando $y_0 = 1$ la solución es $y(t) = 1$, y su derivada segunda es nula, por tanto se tiene que para cualquier valor de h el error será nulo

Ejercicio 2.- Dado el problema de valor inicial $y'(t) = f(t, y)$ $a \leq t \leq b$ con $y(a) = A$

- Obtener la expresión general del método de Taylor de orden 2, indicando el valor del error de truncamiento local.
- Obtener las relaciones entre c_1 , c_2 , α y β para que el método de Runge-Kutta dado por $w_{n+1} = w_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$ con $k_1 = hf(t_n, w_n)$ y $k_2 = hf(t_n + \alpha h, w_n + \beta k_1)$ sea de orden 2. Determinar los valores que hacen mínimo el error de truncamiento local.
- Como aplicación, resolver $y'(t) = y - t + 1$ $0 \leq t \leq 1$ con $y(0) = 1$ y $h = 0.5$ por ambos métodos (Taylor y Runge-Kutta) y comparar el error cometido por ambos.

Apartado (a) Método de Taylor de orden 2

Desarrollo de Taylor de la solución, denotando por $t_n = a + nh$ e $y_n = y(t_n)$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 3 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{y'_n}{1!} + h^2 \frac{y''_n}{2!} + h^3 \frac{y'''(\xi)}{3!} = y_n + h \left(f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(t_n, y_n) \right) + h^3 \frac{y'''(\xi)}{3!} =$$

$$= y_n + h \left(f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \{ f_t(t_n, y_n) + f_y(t_n, y_n) f(t_n, y_n) \} \right) + O(h^3) \text{ con } \xi \in [y_n, y_{n+1}]$$

$$\text{donde } O(h^3) = \frac{h^3}{6} \{ f_{tt} + f_{ty} f + f_{yt} f + f_{yy} f^2 + f_y (f_t + f_y f) \}.$$

De la definición de error de truncamiento local, se llega a que

$$\tau(h) = \frac{y_{n+1} - \{y_n + hT(t_n, y_n, h)\}}{h} = \frac{h^2}{6} \{ f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y f_t + (f_y)^2 f \}$$

Apartado (b) Método de Runge-Kutta de orden 2

Para tener un método de orden 2, será necesario desarrollar hasta términos de orden h^3 , lo que nos permite obtener también la expresión del error. Puesto que el orden es de truncamiento local, se supone que las soluciones de partida son exactas, lo que conduce al siguiente esquema

$$y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + c_2 k_2 \text{ con}$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) = h \left\{ f + \frac{1}{1!} (\alpha h f_t + \beta k_1 f_y) + \frac{1}{2!} (\alpha^2 h^2 f_{tt} + 2\alpha h \beta k_1 f_{ty} + \beta^2 k_1^2 f_{yy}) + o(h^2) \right\} =$$

$$= h \left\{ f + \frac{1}{1!} (\alpha h f_t + \beta h f f_y) + \frac{1}{2!} (\alpha^2 h^2 f_{tt} + 2\alpha \beta h^2 f f_{ty} + \beta^2 h^2 f^2 f_{yy}) + o(h^2) \right\} =$$

$$= hf + h^2 (\alpha f_t + \beta f f_y) + h^3 \left(\frac{1}{2} \alpha^2 f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{1}{2} \beta^2 f^2 f_{yy} \right) + o(h^3)$$

Sustituyendo en la expresión inicial

$$y_{n+1} = y_n + c_1 hf + c_2 \left\{ hf + h^2 (\alpha f_t + \beta f f_y) + h^3 \left(\frac{1}{2} \alpha^2 f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{1}{2} \beta^2 f^2 f_{yy} \right) + o(h^3) \right\}$$

Igualando términos de esta expresión con los del método de Taylor

	<u>Taylor</u>	<u>Runge-Kutta</u>
h^0	y_n	y_n
h^1	f	$f(c_1 + c_2)$
h^2	$\frac{1}{2} f_t + \frac{1}{2} f_y f$	$c_2 (\alpha f_t + \beta f f_y)$
h^3	$\frac{1}{6} \{ f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y f_t + (f_y)^2 f \}$	$c_2 \left(\frac{1}{2} \alpha^2 f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{1}{2} \beta^2 f^2 f_{yy} \right)$

se obtiene que $c_1 + c_2 = 1$ y $c_2 \alpha = c_2 \beta = \frac{1}{2}$. No es posible igualar los términos en h^3 . Así pues,

$$c_1 = 1 - c_2 \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2c_2}$$

Se observa que no hay una solución única, sino una familia de soluciones. Dando valores a c^2 se obtienen las diferentes soluciones.

El error de truncamiento local en h^2 viene dado como

$$\frac{1}{6} \{ f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y f_t + (f_y)^2 f \} - c_2 \left(\frac{1}{2} \alpha^2 f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{1}{2} \beta^2 f^2 f_{yy} \right) =$$

$$= f_{tt} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} c_2 \alpha^2 \right) + f f_{ty} \left(\frac{1}{3} - c_2 \alpha \beta \right) + f^2 f_{yy} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} c_2 \beta^2 \right) + \frac{1}{6} \{ f_y f_t + (f_y)^2 f \}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 4 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Puesto que los términos entre llaves no dependen de los valores de c_1 , c_2 , α y β , intentaremos anular el resto de los componentes del error, lo que se consigue tomando $c_2\alpha\beta - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow c_2 = \frac{3}{4}$. La fórmula de Runge-Kutta se escribe entonces como:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2 \text{ con } k_1 = hf(t_n, w_n) \text{ y } k_2 = hf(t_n + \frac{2}{3}h, w_n + \frac{2}{3}k_1),$$

cuyo error local de truncamiento es $\frac{1}{6} \left\{ f_y f_t + (f_y)^2 f \right\} h^2$

Apartado (c) Aplicación

$$y'(t) = y - t + 1 \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ con } y(0) = 1$$

Solución analítica exacta

La ecuación es lineal de primer orden, de la forma $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$ con $p(t) = -1$ y $q(t) = 1 - t$.

Su solución se obtiene integrando $\frac{d}{dt} \left(e^{\int p(t)dt} y \right) = q(t) e^{\int p(t)dt}$

$$e^{-t} y = \int (1-t) e^{-t} dt = -(1-t) e^{-t} - \int -e^{-t} + c = t e^{-t} + c$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 1$ se llega a $y(t) = e^t + t$, de donde $y(1) = e^1 + 1 \approx 3.71828...$

Método de Taylor

Puesto que $y'(t) = y - t + 1$, derivando $y''(t) = y' - 1 = y - t$, de donde el método queda como

$$w_{n+1} = w_n + h \left(w_n - t_n + 1 + \frac{1}{2} h (w_n - t_n) \right) = w_n \left(1 + h + \frac{1}{2} h^2 \right) - t_n \left(h + \frac{1}{2} h^2 \right) + h$$

$$w_0 = 1$$

$$w_1 = w_0 \left(1 + h + \frac{1}{2} h^2 \right) - t_0 \left(h + \frac{1}{2} h^2 \right) + h = 1(1.625) - 0(0.625) + 0.5 = 2.125$$

$$w_2 = w_1(1.625) - t_1(0.625) + 0.5 = 2.125(1.625) - 0.5(0.625) + 0.5 = 3.640625$$

el error cometido es por tanto 0.0776568...

Método de Runge Kutta

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2 \text{ con}$$

$$k_1 = h(w_n - t_n + 1) \text{ y } k_2 = hf(t_n + \frac{2}{3}h, w_n + \frac{2}{3}k_1) = h(w_n + \frac{2}{3}k_1 - t_n - \frac{2}{3}h + 1)$$

Realizamos los cálculos

$$w_0 = 1$$

$$k_1 = 0.5(1 - 0 + 1) = 1, \quad k_2 = 0.5\left(1 + \frac{2}{3}1 - 0 - \frac{2}{3}0.5 + 1\right) = \frac{7}{6} \rightarrow w_1 = 1 + \frac{1}{4}1 + \frac{3}{4}\frac{7}{6} = 2.125$$

$$k_1 = 0.5(2.125 - 0.5 + 1) = 1.3125, \quad k_2 = 0.5\left(2.125 + \frac{2}{3}1.3125 - 0.5 - \frac{2}{3}0.5 + 1\right) = 1.5833$$

$$\rightarrow w_2 = 2.125 + \frac{1}{4}1.3125 + \frac{3}{4}1.5833 = 3.640625$$

Coinciden los resultados, como cabía esperar, ya que $f_{tt} = f_{ty} = f_{yy} = 0$, y por tanto el término principal del error de truncamiento local es el mismo para ambos métodos.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 5 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 3.- La velocidad de descenso de un paracaidista viene dada por $\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$, donde g es la constante gravitacional, m es la masa y c es el coeficiente de arrastre.

- Determinar, en función de la condición inicial y del paso h , la expresión del valor aproximado w_k utilizando el método de Euler.
- Calcular la solución analítica exacta. Demostrar que la solución aproximada tiende a la exacta cuando se aumenta el número de intervalos.
- Calcular el valor del tamaño de paso h para, usando aritmética exacta, poder asegurar un error menor que 0.1 cuando se toma $y_0 = 0$. Verificar que los 2 primeros términos verifican la cota de error. ¿Qué ocurre si se toma $y_0 = 1$?
- Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3 así como su error local.

Apartado (a) Aproximación utilizando Euler

El Método de Euler para el P.V.I. $y'(t) = f(t, y)$ $a \leq t \leq b$ con $y(a) = \alpha$ se escribe como:

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{con } w_0 = \alpha \text{ y } h = \frac{b-a}{n}.$$

En este caso se tiene que $f(t_k, w_k) = -\frac{c}{m}w_k + g$ y por tanto

$$w_{k+1} = w_k + h\left(-\frac{c}{m}w_k + g\right) = w_k\left(1 - \frac{c}{m}h\right) + hg = w_k(1 - \alpha h) + hg \quad \text{con } \alpha = \frac{c}{m}$$

Por inducción

$$\left. \begin{array}{l} w_{k+1} = w_k(1 - \alpha h) + hg \\ w_k = w_{k-1}(1 - \alpha h) + hg \\ \vdots \\ w_1 = w_0(1 - \alpha h) + hg \end{array} \right\} \begin{array}{l} w_{k+1} = hg + (1 - \alpha h)[hg + (1 - \alpha h)w_{k-1}] = \dots \\ = hg[1 + (1 - \alpha h) + \dots + (1 - \alpha h)^k] + (1 - \alpha h)^{k+1}w_0 \end{array}$$

y por tanto

$$w_n = hg \frac{(1 - \alpha h)^n - 1}{(1 - \alpha h) - 1} + (1 - \alpha h)^n w_0 = (1 - \alpha h)^n \left(w_0 - \frac{g}{\alpha}\right) + \frac{g}{\alpha}$$

Apartado (b) Solución exacta y Convergencia del Método

La ecuación es lineal de primer orden, de la forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \text{ Cuya solución se obtiene integrando } \frac{d}{dt}\left(e^{\int p(t)dt} y\right) = q(t)e^{\int p(t)dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\int \alpha dt} v\right) = ge^{\int \alpha dt} \rightarrow \frac{d}{dt}(e^{\alpha t} v) = ge^{\alpha t} \rightarrow e^{\alpha t} v = \frac{ge^{\alpha t}}{\alpha} + cte$$

Aplicando la condición inicial $v(0) = v_0$ se llega a $v(t) = \frac{g}{\alpha} + \left(y_0 - \frac{g}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 6 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Comprobamos la convergencia del método, recordando que $h = \frac{t}{n}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} w_n = \lim_{h \rightarrow 0} \left[(1 - \alpha h)^n \left(w_0 - \frac{g}{\alpha} \right) + \frac{g}{\alpha} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[(1 - \alpha h)^{\frac{-1}{\alpha h}} \right]^{\alpha t} \left(w_0 - \frac{g}{\alpha} \right) + \frac{g}{\alpha} = e^{-\alpha t} \left(w_0 - \frac{g}{\alpha} \right) + \frac{g}{\alpha}$$

Apartado (c) Tamaño del paso (Sin errores de redondeo)

Sabemos que $|v(t_n) - w_n| \leq \frac{hM}{2L} (e^{(t_k - a)L} - 1)$, siendo L la constante de Lipschitz y M la cota de $v''(t)$.

La constante de Lipschitz se calcula como:

$$\forall y_1, y_2 : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \text{ de donde } |(-\alpha y_1 + g) - (-\alpha y_2 + g)| \leq \alpha|y_1 - y_2| \Rightarrow L = \alpha.$$

Tomando $v_0 = 0$ la solución es $v(t) = \frac{g}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$, y su derivada segunda viene acotada por

$$|v''(t)| = |-g\alpha e^{-\alpha t}| \leq g\alpha e^{-\alpha 0} = g\alpha.$$

Por tanto,, considerando como valor final $t_n = \tau$

$$|v(\tau) - w_n| \leq \frac{hg\alpha}{2\alpha} (e^{\alpha\tau} - 1) < 0.1 \rightarrow h < \frac{0.2}{g(e^{\alpha\tau} - 1)}$$

Tomando $h = \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g}$ y calculamos todos los términos pedidos:

$$w_0 = 0$$

$$w_1 = w_0 \left(1 - \alpha \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g} \right) + g \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g} = 0.2e^{-\alpha\tau}$$

$$w_2 = w_1 \left(1 - \alpha \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g} \right) + 0.2e^{-\alpha\tau} = 0.2e^{-\alpha\tau} \left(2 - \frac{\alpha}{g} \right)$$

t_n	$v(t_n)$	w_n	$ v(t_n) - w_n $	$\frac{h}{2}(e^{t_n} - 1)$
0	0	$w_0 = 0$		
$h = \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g}$	$v(t_1) = \frac{g}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha \frac{0.2}{g} e^{\alpha t_n}} \right)$	$w_1 = 0.2e^{-\alpha\tau}$		
$h = \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g}$	$v(t_1) = \frac{g}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha \frac{0.2}{g} e^{\alpha t_n}} \right)$	$w_2 = 0.2e^{-\alpha\tau} \left(2 - \frac{\alpha}{g} \right)$		

Apartado (d) Método de Taylor

Desarrollo de Taylor de la solución, denotando por $t_n = a + nh$ y $v_n = v(t_n)$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 7 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= v_n + h \frac{v'_n}{1!} + h^2 \frac{v''_n}{2!} + h^3 \frac{v'''_n}{3!} + h^4 \frac{v^{iv}_n(\xi)}{4!} = \\
&= v_n + h \left(f(t_n, v_n) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(t_n, v_n) + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} f(t_n, v_n) \right) + h^4 \frac{v^{iv}(\xi)}{4!} = \\
&= v_n + h \left(f + \frac{h}{2} \{f_t + f_v f\} + \frac{h^2}{6} \{f_{tt} + 2f_{tv}f + f_{vv}f^2 + f_v^2 f + f_v f_t\} \right) + O(h^4) \text{ con } \xi \in [t_n, t_{n+1}]
\end{aligned}$$

La definición de error de truncamiento local viene dada por la expresión

$$\tau(h) = \frac{y_{n+1} - \{y_n + hT(t_n, y_n, h)\}}{h}$$

Sin embargo, para obtener el método es mucho más simple operar directamente en la expresión de f .

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= v_n + h \frac{v'_n}{1!} + h^2 \frac{v''_n}{2!} + h^3 \frac{v'''_n}{3!} + h^4 \frac{v^{iv}_n(\xi)}{4!} = \left\{ \begin{array}{l} v' = g - \frac{c}{m} v \quad v''' = \left(\frac{c}{m}\right)^2 \left(g - \frac{c}{m} v\right) \\ v'' = -\frac{c}{m} v' = -\frac{c}{m} \left(g - \frac{c}{m} v\right) \quad v^{iv} = \left(\frac{-c}{m}\right)^3 \left(g - \frac{c}{m} v\right) \end{array} \right\} = \\
&= v_n + h \left(g - \frac{c}{m} v_n \right) - \frac{h^2}{2!} \frac{c}{m} \left(g - \frac{c}{m} v_n \right) + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{c}{m} \right)^2 \left(g - \frac{c}{m} v_n \right) + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{-c}{m} \right)^3 \left(g - \frac{c}{m} v(\xi) \right) = \\
&= v_n + \left(g - \frac{c}{m} v_n \right) \left(h - \frac{h^2}{2!} \frac{c}{m} + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{c}{m} \right)^2 \right) + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{-c}{m} \right)^3 \left(g - \frac{c}{m} v(\xi) \right)
\end{aligned}$$

$$\text{donde el error de truncamiento local es } \tau(h) = \frac{h^3}{4!} \left(\frac{-c}{m} \right)^3 \left(g - \frac{c}{m} v(\xi) \right)$$

Ejercicio 4.- Se considera el P.V.I. $y'(t) = -ty$ $0 \leq t \leq 1$ con $y(0) = y_0$

- Determinar, en función de la condición inicial y del paso h , la expresión del valor aproximado w_k utilizando el método de Euler.
- Calcular la solución analítica exacta. Demostrar que la solución aproximada tiende a la exacta cuando se aumenta el número de intervalos, esto es, $\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ kh=t}} w_k = y(t)$.
- Calcular el valor del tamaño de paso h para, usando aritmética exacta, poder asegurar un error menor que 0.1 cuando se toma $y_0 = 1$. Verificar que los 2 primeros términos verifican la cota de error. ¿Qué ocurre si se toma $y_0 = 0$?
- Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3, así como su error local

Apartado (a) Aproximación utilizando Euler

El Método de Euler para el P.V.I. $y'(t) = f(t, y)$ $a \leq t \leq b$ con $y(a) = \alpha$ se escribe como:

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 8 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) \quad 1 \leq k \leq n \text{ con } w_0 = \alpha \text{ y } h = \frac{b-a}{n}.$$

Particularizando

$$w_{k+1} = w_k + h(-t_k w_k) = w_k(1 - ht_k) \quad 1 \leq k \leq n$$

Por inducción

$$\left. \begin{array}{l} w_{k+1} = w_k(1 - ht_k) \\ w_k = w_{k-1}(1 - ht_{k-1}) \\ \vdots \\ w_1 = w_0(1 - ht_0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} w_{k+1} = w_0(1 - ht_0)(1 - ht_1) \cdots (1 - ht_k) = \\ = w_0(1 - h^2 0)(1 - h^2 1) \cdots (1 - h^2 k) \end{array}$$

y por tanto

$$w_n = hg \frac{(1 - \alpha h)^n - 1}{(1 - \alpha h) - 1} + (1 - \alpha h)^n w_0 = (1 - \alpha h)^n \left(w_0 - \frac{g}{\alpha} \right) + \frac{g}{\alpha}$$

Apartado (b) Solución exacta y Convergencia del Método

La ecuación es lineal de primer orden, de la forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \text{ Cuya solución se obtiene integrando } \frac{d}{dt} \left(e^{\int p(t)dt} y \right) = q(t) e^{\int p(t)dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\int \alpha dt} v \right) = g e^{\int \alpha dt} \rightarrow \frac{d}{dt} (e^{\alpha t} v) = g e^{\alpha t} \rightarrow e^{\alpha t} v = \frac{g e^{\alpha t}}{\alpha} + cte$$

Aplicando la condición inicial $v(0) = v_0$ se llega a $v(t) = \frac{g}{\alpha} + \left(y_0 - \frac{g}{\alpha} \right) e^{-\alpha t}$

Comprobamos la convergencia del método, recordando que $h = \frac{t}{n}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} w_n = \lim_{h \rightarrow 0} \left[(1 - \alpha h)^n \left(w_0 - \frac{g}{\alpha} \right) + \frac{g}{\alpha} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[(1 - \alpha h)^{\frac{-1}{\alpha h}} \right]^{\alpha t} \left(w_0 - \frac{g}{\alpha} \right) + \frac{g}{\alpha} = e^{-\alpha t} \left(w_0 - \frac{g}{\alpha} \right) + \frac{g}{\alpha}$$

Apartado (c) Tamaño del paso (Sin errores de redondeo)

Sabemos que $|v(t_n) - w_n| \leq \frac{hM}{2L} (e^{(t_k - a)L} - 1)$, siendo L la constante de Lipschitz y M la cota de $v''(t)$.

La constante de Lipschitz se calcula como:

$$\forall y_1, y_2 : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \text{ de donde } |(-\alpha y_1 + g) - (-\alpha y_2 + g)| \leq \alpha|y_1 - y_2| \Rightarrow L = \alpha.$$

Tomando $v_0 = 0$ la solución es $v(t) = \frac{g}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$, y su derivada segunda viene acotada por

$$|v''(t)| = |-g\alpha e^{-\alpha t}| \leq g\alpha e^{-\alpha 0} = g\alpha.$$

Por tanto,, considerando como valor final $t_n = \tau$

$$|v(\tau) - w_n| \leq \frac{hg\alpha}{2\alpha} (e^{\alpha\tau} - 1) < 0.1 \rightarrow h < \frac{0.2}{g(e^{\alpha\tau} - 1)}$$

Tomando $h = \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g}$ y calculamos todos los términos pedidos:

$$w_0 = 0$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 9 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$w_1 = w_0 \left(1 - \alpha \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g} \right) + g \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g} = 0.2e^{-\alpha\tau}$$

$$w_2 = w_1 \left(1 - \alpha \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g} \right) + 0.2e^{-\alpha\tau} = 0.2e^{-\alpha\tau} \left(2 - \frac{\alpha}{g} \right)$$

t_n	$v(t_n)$	w_n	$ v(t_n) - w_n $	$\frac{h}{2}(e^{t_n} - 1)$
0	0	$w_0 = 0$		
$h = \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g}$	$v(t_1) = \frac{g}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha \frac{0.2}{g} e^{\alpha t_n}} \right)$	$w_1 = 0.2e^{-\alpha\tau}$		
$h = \frac{0.2e^{-\alpha\tau}}{g}$	$v(t_1) = \frac{g}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha \frac{0.2}{g} e^{\alpha t_n}} \right)$	$w_2 = 0.2e^{-\alpha\tau} \left(2 - \frac{\alpha}{g} \right)$		

Apartado (d) Método de Taylor

Desarrollo de Taylor de la solución, denotando por $t_n = a + nh$ y $v_n = v(t_n)$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + h \frac{v'_n}{1!} + h^2 \frac{v''_n}{2!} + h^3 \frac{v'''_n}{3!} + h^4 \frac{v^{iv}_n(\xi)}{4!} = \\ &= v_n + h \left(f(t_n, v_n) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(t_n, v_n) + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} f(t_n, v_n) \right) + h^4 \frac{v^{iv}_n(\xi)}{4!} = \\ &= v_n + h \left(f + \frac{h}{2} \{ f_t + f_v f \} + \frac{h^2}{6} \{ f_{tt} + 2f_{tv} f + f_{vv} f^2 + f_v^2 f + f_v f_t \} \right) + O(h^4) \text{ con } \xi \in [t_n, t_{n+1}] \end{aligned}$$

La definición de error de truncamiento local viene dada por la expresión

$$\tau(h) = \frac{y_{n+1} - \{y_n + hT(t_n, y_n, h)\}}{h}$$

Sin embargo, para obtener el método es mucho más simple operar directamente en la expresión de f .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + h \frac{v'_n}{1!} + h^2 \frac{v''_n}{2!} + h^3 \frac{v'''_n}{3!} + h^4 \frac{v^{iv}_n(\xi)}{4!} = \left\{ \begin{array}{l} v' = g - \frac{c}{m} v \quad v''' = \left(\frac{c}{m} \right)^2 \left(g - \frac{c}{m} v \right) \\ v''' = -\frac{c}{m} v' = -\frac{c}{m} \left(g - \frac{c}{m} v \right) \quad v^{iv} = \left(\frac{-c}{m} \right)^3 \left(g - \frac{c}{m} v \right) \end{array} \right\} = \\ &= v_n + h \left(g - \frac{c}{m} v_n \right) - \frac{h^2}{2!} \frac{c}{m} \left(g - \frac{c}{m} v_n \right) + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{c}{m} \right)^2 \left(g - \frac{c}{m} v_n \right) + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{-c}{m} \right)^3 \left(g - \frac{c}{m} v(\xi) \right) = \\ &= v_n + \left(g - \frac{c}{m} v_n \right) \left(h - \frac{h^2}{2!} \frac{c}{m} + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{c}{m} \right)^2 \right) + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{-c}{m} \right)^3 \left(g - \frac{c}{m} v(\xi) \right) \end{aligned}$$

donde el error de truncamiento local es $\tau(h) = \frac{h^3}{4!} \left(\frac{-c}{m} \right)^3 \left(g - \frac{c}{m} v(\xi) \right)$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 10 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 5.- Se considera el Problema de valor inicial $y'(t) = -\frac{y}{t}$ $1 \leq t \leq 3$ con $y(1) = 3$

- Calcular la solución analítica exacta.
- Aplicar el método de Euler con paso $h=1$ para aproximar $y(3)$.
- Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3, así como su error local. Aplicarlo para calcular $y(3)$.
- Aplicar el método de Runge Kutta de orden 2: $w_{n+1} = w_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$ con $k_1 = hf(t_n, w_n)$ y $k_2 = hf(t_n + \alpha h, w_n + \beta k_1)$ tomando $\{c_1 = 0, c_2 = 1, \alpha = \beta = \frac{1}{2}\}$ ¿Cuál es la interpretación grafica de este método?
- Comparar el error real cometido por todos los métodos ¿Cuál es más exacto en este caso? ¿Y cuál debería serlo, en general?

Apartado (a) Solución exacta

La ecuación es lineal de primer orden, de la forma $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$. Cuya solución se obtiene obteniendo el factor integrante y resolviendo:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t) q(t) dt + c \right)$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{dt}{t}} = t \quad y(t) = \frac{1}{t} \left(\int t \cdot 0 dt + c \right) = \frac{c}{t} \quad y(1) = 3 \Rightarrow y(t) = \frac{3}{t}$$

También se podría haber resuelto utilizando variables separables

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{t} \rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dt}{t} \rightarrow \ln(y) = -\ln(t) + c \rightarrow y(t) = \frac{e^c}{t}$$

$$y(1) = 3 \Rightarrow e^c = 3 \rightarrow y(t) = \frac{3}{t}$$

Apartado (b) Aproximación utilizando Euler

El Método de Euler para el P.V.I. $y'(t) = f(t, y)$ $a \leq t \leq b$ con $y(a) = \alpha$ se escribe como:

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{con } w_0 = \alpha \quad \text{y } h = \frac{b-a}{n}.$$

Particularizando

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 11 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) = w_k + h \left(-\frac{w_k}{t_k} \right) \quad 1 \leq k \leq 3 \quad w_0 = 3 \quad h = 1$$

$$t_1 = t_0 + h = 2 \quad w_1 = w_0 - h \frac{w_0}{t_0} = 3 - 1 \frac{3}{1} = 0$$

$$t_2 = t_1 + h = 3 \quad w_2 = w_1 - h \frac{w_1}{t_1} = 0 - 1 \frac{0}{2} = 0$$

Apartado (c) Método de Taylor

Denotando por $t_n = a + nh$ y $y_n = y(t_n)$, el desarrollo de Taylor conduce a,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \frac{y'_n}{1!} + h^2 \frac{y''_n}{2!} + h^3 \frac{y'''_n}{3!} + h^4 \frac{y^{iv}_n(\xi)}{4!} = \\ &= y_n + h \left(f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} f(t_n, y_n) \right) + h^4 \frac{y^{iv}(\xi)}{4!} = \\ &= y_n + h \left(f + \frac{h}{2} \{ f_t + f_y f \} + \frac{h^2}{6} \{ f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y^2 f + f_y f_t \} \right) + O(h^4) \text{ con } \xi \in [t_n, t_{n+1}] \end{aligned}$$

La definición de error de truncamiento local viene dada por la expresión

$$\tau(h) = \frac{y_{n+1} - \{y_n + hT(t_n, y_n, h)\}}{h}$$

Para obtener el método es mucho más simple operar directamente en la expresión de f .

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \frac{y'_n}{1!} + h^2 \frac{y''_n}{2!} + h^3 \frac{y'''_n}{3!} + h^4 \frac{y^{iv}_n(\xi)}{4!} = \left\{ \begin{array}{l} y' = -\frac{y}{t} \quad y''' = \frac{2}{t^2} y' - \frac{4y}{t^3} = \frac{-6y}{t^3} \\ y'' = -\frac{1}{t} y' + \frac{y}{t^2} = \frac{2y}{t^2} \quad y^{iv} = \frac{-6}{t^3} y' + \frac{18y}{t^4} = \frac{24y}{t^4} \end{array} \right\} = \\ &= y_n + h \left(-\frac{y_n}{t_n} \right) + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{2y_n}{t_n^2} \right) + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{-6y_n}{t_n^3} \right) + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{24y(\xi)}{(\xi)^4} \right) = \\ &= y_n \left(1 - \frac{h}{t_n} + \frac{h^2}{t_n^2} - \frac{h^3}{t_n^3} \right) + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{24y(\xi)}{(\xi)^4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{donde el error de truncamiento local es } \tau(h) = \frac{h^3}{4!} \left(\frac{24y(\xi)}{(\xi)^4} \right)$$

Realizamos las evaluaciones, a partir de la expresión anterior

$$w_{n+1} = w_n \left(1 - \frac{h}{t_n} + \frac{h^2}{t_n^2} - \frac{h^3}{t_n^3} \right) \quad 1 \leq k \leq 3 \quad w_0 = 3 \quad h = 1$$

$$t_1 = 2 \quad w_1 = w_0 \left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1^2}{1^2} - \frac{1^3}{1^3} \right) = 3(0) = 0$$

$$t_2 = 3 \quad w_2 = w_1 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1^2}{2^2} - \frac{1^3}{2^3} \right) = 3(0) = 0$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 12 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (d) Método de Runge-Kutta de orden 2

Con los datos indicados, el método de Runge Kutta de Orden 2 viene indicado mediante

$$w_{n+1} = w_n + k_2 \quad k_1 = hf(t_n, w_n) \quad k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad 0 \leq n \leq 1$$

En esta expresión, k_1 aproxima la variación de la y con la x , multiplicando la variación de abscisas h por la pendiente calculada en el extremo izquierdo. Por su parte k_2 pretende evaluar la pendiente en el punto medio, por lo que los valores de (x,y) corresponden con $(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{1}{2}k_1)$. El método se conoce, obviamente, por el del Punto Medio.

$$t_0 = 1 \quad k_1 = -h \frac{w_n}{t_n} \quad k_2 = -h \frac{w_n + \frac{1}{2}k_1}{t_n + \frac{1}{2}h} \quad w_0 = 3$$

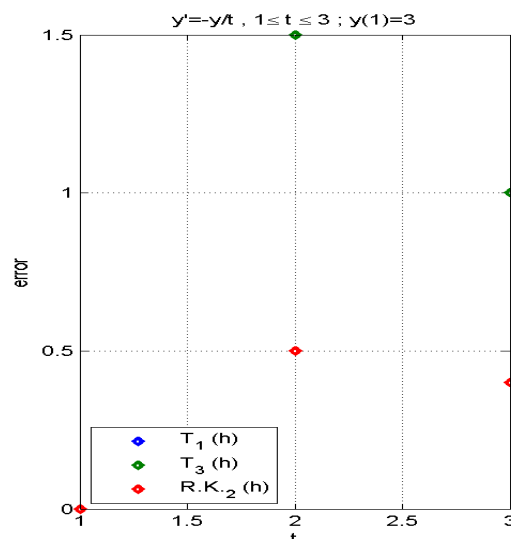
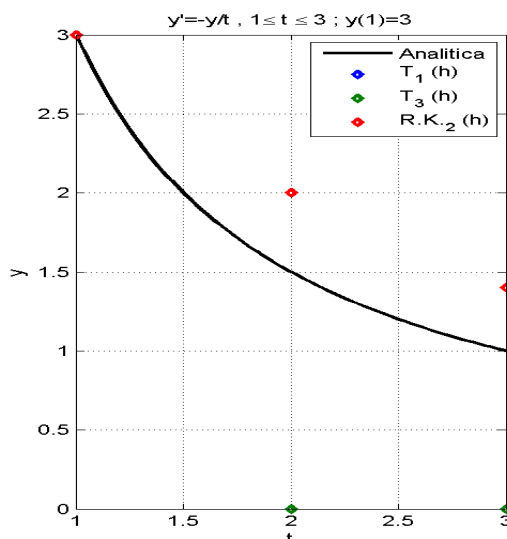
$$t_1 = 2 \quad 1\left(-\frac{3.0}{1.0}\right) = -3 \quad 1\left(-\frac{3-3 \times 0.5}{1+1 \times 0.5}\right) = -1 \quad w_1 = w_0 + k_2 = 3 + (-1.0) = 2$$

$$t_2 = 3 \quad 1\left(-\frac{2}{2}\right) = -1 \quad 1\left(-\frac{1.5-0.75 \times 0.5}{2+1 \times 0.5}\right) = -0.6 \quad w_2 = w_1 + k_2 = 2 + (-0.6) = 1.4$$

Apartado (e) Aplicación

Representando los resultados de forma tabular y gráfica, se observa que el mas exacto es el de Runge-Kutta (orden 2), pese a que, en general, el más exacto debería ser el de Taylor puesto que es el de mayor orden.

Solución	$t_0 = 1$	$t_1 = 2$	$t_2 = 3$
Euler	3.0	0.0	0.0
Taylor	3.0	0.0	0.0
Runge	3.0	2.0	1.4
Exacta	3.0	1.5	1.0



Ejercicio 6.- Se considera el problema de valor inicial $y'(t) = \left(\frac{y}{t}\right)^2$ $2 \leq t \leq 5$ con $y(2) = 2$.

- Calcular la solución analítica exacta.
- Aplicar el método de Euler con paso $h=1$ para aproximar $y(5)$.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 13 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

- (c) Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3, así como su error local. Aplicarlo para calcular $y(5)$.
- (d) Aplicar el método de Runge Kutta de orden 2: $w_{n+1} = w_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$ con $k_1 = hf(t_n, w_n)$ y $k_2 = hf(t_n + \alpha h, w_n + \beta k_1)$ tomando $\{c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = 1\}$ ¿Cuál es la interpretación grafica de este método?
- (e) Comparar el error real cometido por todos los métodos ¿Cuál es más exacto en este caso? ¿Y cuál debería serlo, en general?

Apartado (a) Solución exacta

La ecuación no es lineal, por lo que hay que resolverla utilizando separación de variables:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{y}{t}\right)^2 \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dt}{t^2} \rightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{t} - c \rightarrow y = \frac{t}{1+tc}$$

$$y(2) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{2}{1+2c} \rightarrow c = 0 \Rightarrow y(t) = t$$

Apartado (b) Aproximación utilizando Euler

El Método de Euler para el P.V.I. $y'(t) = f(t, y)$ $a \leq t \leq b$ con $y(a) = \alpha$ se escribe como:

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{con } w_0 = \alpha \text{ y } h = \frac{b-a}{n}.$$

Particularizando

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) = w_k h \left(\frac{w_k}{t_k}\right)^2 \quad 0 \leq k \leq 2 \quad w_0 = 2 \quad t_0 = 2 \quad h = 1$$

$$t_1 = t_0 + h = 3 \quad w_1 = w_0 + h \left(\frac{w_0}{t_0}\right)^2 = 2 + 1 \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 3$$

$$t_2 = t_1 + h = 4 \quad w_2 = w_1 - h \left(\frac{w_1}{t_1}\right)^2 = 3 + 1 \left(\frac{3}{3}\right)^2 = 4$$

$$t_3 = t_2 + h = 5 \quad w_3 = w_1 - h \left(\frac{w_2}{t_2}\right)^2 = 4 + 1 \left(\frac{4}{4}\right)^2 = 5$$

Apartado (c) Método de Taylor

Denotando por $t_n = a + nh$ y $y_n = y(t_n)$, el desarrollo de Taylor conduce a,

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 14 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h \frac{y'_n}{1!} + h^2 \frac{y''_n}{2!} + h^3 \frac{y'''_n}{3!} + h^4 \frac{y^{iv}_n(\xi)}{4!} = \\
&= y_n + h \left(f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} f(t_n, y_n) \right) + h^4 \frac{y^{iv}(\xi)}{4!} = \\
&= y_n + h \left(f + \frac{h}{2} \{ f_t + f_y f \} + \frac{h^2}{6} \{ f_{tt} + 2 f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y^2 f + f_y f_t \} \right) + O(h^4) \text{ con } \xi \in [t_n, t_{n+1}]
\end{aligned}$$

La definición de error de truncamiento local viene dada por la expresión

$$\tau(h) = \frac{y_{n+1} - \{y_n + hT(t_n, y_n, h)\}}{h}$$

Para obtener el método es mucho más simple operar directamente en la expresión de f .

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h \frac{y'_n}{1!} + h^2 \frac{y''_n}{2!} + h^3 \frac{y'''_n}{3!} + h^4 \frac{y^{iv}_n(\xi)}{4!} = \left\{ \begin{aligned} y' &= y^2 t^{-2} \\ y'' &= 2yy't^{-2} - 2y^2 t^{-3} = 2y^2(y-t)t^{-4} \\ y''' &= 2yy'(y-t)t^{-4} + 2y^2(y'-1)t^{-4} - 8y^2(y-t)t^{-5} = \\ &= 6y^2(y-t)^2 t^{-6} \\ y^{iv} &= 6yy'(y-t)^2 t^{-6} + 12y^2(y-t)(y'-1)t^{-6} - 36y^2(y-t)^2 t^{-7} = \\ &= 24y^2(y-t)^3 t^{-8} \end{aligned} \right\} \\
&= y_n + h \frac{y_n^2}{t_n^2} + \frac{h^2}{2!} \frac{2y_n^2(y_n - t_n)}{t_n^4} + \frac{h^3}{3!} \frac{6y_n^2(y_n - t_n)^2}{t_n^6} + \frac{h^4}{4!} \frac{24y(\xi)^2(y(\xi) - \xi)^3}{\xi^6}
\end{aligned}$$

$$\text{donde el error de truncamiento local es } \tau(h) = \frac{h^3}{4!} \frac{24y(\xi)^2(y(\xi) - \xi)^3}{\xi^6}$$

Realizamos las evaluaciones, a partir de la expresión anterior

$$w_{n+1} = w_n + h \frac{w_n^2}{t_n^2} + \frac{h^2}{2!} \frac{2w_n^2(w_n - t_n)}{t_n^4} + \frac{h^3}{3!} \frac{6w_n^2(w_n - t_n)^2}{t_n^6} \quad 0 \leq k \leq 2 \quad w_0 = 2 \quad t_0 = 2 \quad h = 1$$

$$t_1 = 3 \quad w_1 = w_0 + h \frac{w_0^2}{t_0^2} + \frac{h^2}{2!} \frac{2w_0^2(w_0 - t_0)}{t_0^4} + \frac{h^3}{3!} \frac{6w_0^2(w_0 - t_0)^2}{t_0^6} = 2 + 1 + \frac{0}{2!} + \frac{0}{3!} = 3$$

$$t_2 = 4 \quad w_2 = w_1 + h \frac{w_1^2}{t_1^2} + \frac{h^2}{2!} \frac{2w_1^2(w_1 - t_1)}{t_1^4} + \frac{h^3}{3!} \frac{6w_1^2(w_1 - t_1)^2}{t_1^6} = 3 + 1 + \frac{0}{2!} + \frac{0}{3!} = 4$$

$$t_3 = 5 \quad = w_2 + h \frac{w_2^2}{t_2^2} + \frac{h^2}{2!} \frac{2w_2^2(w_2 - t_2)}{t_2^4} + \frac{h^3}{3!} \frac{6w_2^2(w_2 - t_2)^2}{t_2^6} = 4 + 1 + \frac{0}{2!} + \frac{0}{3!} = 5$$

Apartado (d) Método de Runge-Kutta de orden 2

Con los datos indicados, el método de Runge Kutta de Orden 2 viene indicado mediante

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad k_1 = hf(t_n, w_n) \quad k_2 = hf(t_n + h, w_n + k_1) \quad 0 \leq n \leq 1$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 15 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

En esta expresión, k_1 aproxima la pendiente en el extremo izquierdo multiplicada por la variación de abscisas h . Por su parte k_2 pretende evaluar la pendiente en el extremo derecho multiplicada por la variación de abscisas h . Finalmente se toma el promedio. El método se conoce por el del Trapecio.

$$\begin{aligned}
t_0 = 1 \quad k_1 &= -hw_n^2 t_n & k_2 &= -h\left(w_n + \frac{1}{2}k_1\right)^2 \left(t_n + \frac{1}{2}h\right) & w_0 &= 3 \\
t_1 = 2 \quad -hw_0^2 t_0 &= -9 & -h\left(w_0 + \frac{1}{2}k_1\right)^2 \left(t_0 + \frac{1}{2}h\right) &= -3.375 & w_1 &= w_0 + k_2 = 3 + (-3.375) = -0.3750 \\
t_2 = 3 \quad -hw_1^2 t_1 &= -0.2813 & -h\left(w_1 + \frac{1}{2}k_1\right)^2 \left(t_1 + \frac{1}{2}h\right) &= -0.6647 & w_2 &= w_1 + k_2 = -0.375 + (-0.6) = -1.0397
\end{aligned}$$

Apartado (e) Aplicación

Representando los resultados de forma tabular y gráfica, se observa que el mas exacto es el de Runge-Kutta (orden 2), pese a que, en general (para valores de $h < 1$), el más exacto debería ser el de Taylor puesto que es el de mayor orden.

Solución	$t_0 = 1$	$t_1 = 2$	$t_2 = 3$
Euler	3.0	-6	-78
Taylor	3.0	-37.5	-1.614×10^7
Runge	3.0	-0.3750	-1.0397
Exacta	3.0	0.5455	0.2308

Ejercicio 7.- Se considera el problema de valor inicial $y'(t) = -y^2 t$ $1 \leq t \leq 3$ con $y(1) = 2$.

- Calcular la solución analítica exacta.
- Aplicar el método de Euler con paso $h=1$ para aproximar $y(3)$.
- Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3, así como su error local. Aplicarlo para calcular $y(3)$.
- Aplicar el método de Runge Kutta de orden 2: $w_{n+1} = w_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$ con $k_1 = hf(t_n, w_n)$ y $k_2 = hf(t_n + \alpha h, w_n + \beta k_1)$ tomando $\{c_1 = 0, c_2 = 1, \alpha = \beta = \frac{1}{2}\}$ ¿Cuál es la interpretación grafica de este método?
- Comparar el error real cometido por todos los métodos ¿Cuál es más exacto en este caso? ¿Y cuál debería serlo, en general?

Apartado (a) Solución exacta

La ecuación no es lineal, por lo que hay que resolverla utilizando separación de variables:

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 t \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\int t dt \rightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}(t^2 + c) \rightarrow y = \frac{2}{t^2 + c}$$

$$y(1) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{2}{1+c} \rightarrow c = -\frac{1}{3} \Rightarrow y(t) = \frac{6}{3t^2 - 1}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 16 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (b) Aproximación utilizando Euler

El Método de Euler para el P.V.I. $y'(t) = f(t, y)$ $a \leq t \leq b$ con $y(a) = \alpha$ se escribe como:

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{con } w_0 = \alpha \text{ y } h = \frac{b-a}{n}.$$

Particularizando

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) = w_k - h(w_k^2 t_k) \quad 1 \leq k \leq 3 \quad w_0 = 3 \quad t_0 = 1 \quad h = 1$$

$$t_1 = t_0 + h = 2 \quad w_1 = w_0 - h(w_0^2 t_0) = 3 - 1(3)^2 \cdot 1 = -6$$

$$t_2 = t_1 + h = 3 \quad w_2 = w_1 - h(w_1^2 t_1) = -6 - 1(-6)^2 \cdot 2 = -78$$

Apartado (c) Método de Taylor

Denotando por $t_n = a + nh$ y $y_n = y(t_n)$, el desarrollo de Taylor conduce a,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \frac{y'_n}{1!} + h^2 \frac{y''_n}{2!} + h^3 \frac{y'''_n}{3!} + h^4 \frac{y^{iv}_n}{4!} = \\ &= y_n + h \left(f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} f(t_n, y_n) \right) + h^4 \frac{y^{iv}(\xi)}{4!} = \\ &= y_n + h \left(f + \frac{h}{2} \{ f_t + f_y f \} + \frac{h^2}{6} \{ f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y^2 f + f_y f_t \} \right) + O(h^4) \quad \text{con } \xi \in [t_n, t_{n+1}] \end{aligned}$$

La definición de error de truncamiento local viene dada por la expresión

$$\tau(h) = \frac{y_{n+1} - \{y_n + hT(t_n, y_n, h)\}}{h}$$

Para obtener el método es mucho más simple operar directamente en la expresión de f .

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \frac{y'_n}{1!} + h^2 \frac{y''_n}{2!} + h^3 \frac{y'''_n}{3!} + h^4 \frac{y^{iv}_n}{4!} = \left\{ \begin{array}{l} y' = -y^2 t \\ y'' = -2yy't - y^2 = 2y^3 t^2 - y^2 \\ y''' = 6y^2 y't^2 + 4y^3 t - 2yy' = 6y^3 t - 6y^4 t^3 \\ y^{iv} = 18y^2 y't + 6y^3 - 24y^3 y't^3 - 18y^4 t^2 = \\ \quad = 6y^3 - 36y^4 t^2 + 24y^5 t^4 \end{array} \right\} = \\ &= y_n + h(-y_n^2 t_n) + \frac{h^2}{2!}(2y_n^3 t_n^2 - y_n^2) + \frac{h^3}{3!}(6y_n^3 t_n - 6y_n^4 t_n^3) + \frac{h^4}{4!}(6y(\xi)^3 - 36y(\xi)^4 (\xi)^2 + 24y(\xi)^5 (\xi)^4) \end{aligned}$$

donde el error de truncamiento local es $\tau(h) = \frac{h^3}{4!}(6y(\xi)^3 - 36y(\xi)^4 (\xi)^2 + 24y(\xi)^5 (\xi)^4)$

Realizamos las evaluaciones, a partir de la expresión anterior

$$w_{n+1} = w_n + h(-w_n^2 t_n) + \frac{h^2}{2!}(2w_n^3 t_n^2 - w_n^2) + \frac{h^3}{3!}(6w_n^3 t_n - 6w_n^4 t_n^3) \quad 1 \leq k \leq 3 \quad w_0 = 3 \quad t_0 = 1 \quad h = 1$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 17 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$t_1 = 2 \quad w_1 = w_0 + h(-w_0^2 t_0) + \frac{h^2}{2!}(2w_0^3 t_0^2 - w_0^2) + \frac{h^3}{3!}(6w_0^3 t_0 - 6w_0^4 t_0^3) = 3 - 9 + \frac{45}{2!} - \frac{324}{3!} = -37.5$$

$$t_2 = 3 \quad w_2 = w_1 + h(-w_1^2 t_1) + \frac{h^2}{2!}(2w_1^3 t_1^2 - w_1^2) + \frac{h^3}{3!}(6w_1^3 t_1 - 6w_1^4 t_1^3) =$$

$$= -37.5 - 2.8125 \times 10^3 - \frac{4.2328}{2!} \times 10^5 - \frac{9.5555}{3!} \times 10^7 = -1.614 \times 10^7$$

Apartado (d) Método de Runge-Kutta de orden 2

Con los datos indicados, el método de Runge Kutta de Orden 2 viene indicado mediante

$$w_{n+1} = w_n + k_2 \quad k_1 = hf(t_n, w_n) \quad k_2 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{1}{2}k_1) \quad 0 \leq n \leq 1$$

En esta expresión, k_1 aproxima la variación de la y con la x , multiplicando la variación de abscisas h por la pendiente calculada en el extremo izquierdo. Por su parte k_2 pretende evaluar la pendiente en el punto medio, por lo que los valores de (x, y) corresponden con $(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{1}{2}k_1)$. El método se conoce, obviamente, por el del Punto Medio.

$$t_0 = 1 \quad k_1 = -hw_n^2 t_n \quad k_2 = -h(w_n + \frac{1}{2}k_1)^2(t_n + \frac{1}{2}h) \quad w_0 = 3$$

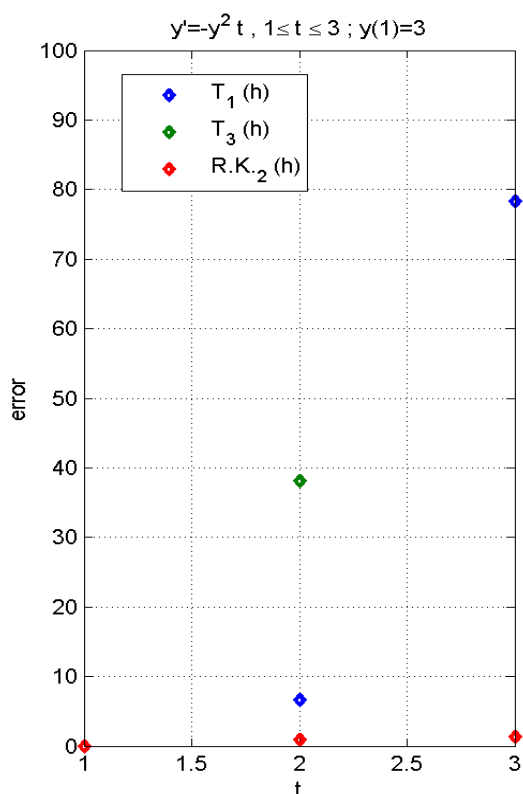
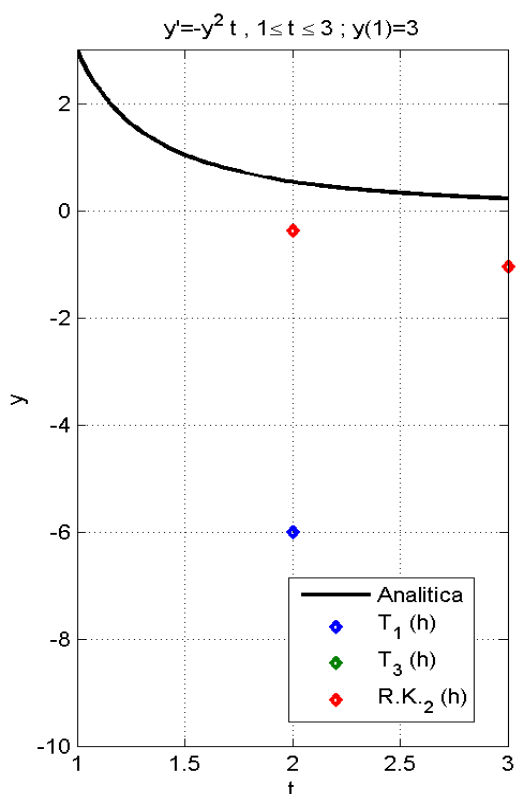
$$t_1 = 2 \quad -hw_0^2 t_0 = -9 \quad -h(w_0 + \frac{1}{2}k_1)^2(t_0 + \frac{1}{2}h) = -3.375 \quad w_1 = w_0 + k_2 = 3 + (-3.375) = -0.3750$$

$$t_2 = 3 \quad -hw_1^2 t_1 = -0.2813 \quad -h(w_1 + \frac{1}{2}k_1)^2(t_1 + \frac{1}{2}h) = -0.6647 \quad w_2 = w_1 + k_2 = -0.375 + (-0.6) = -1.0397$$

Apartado (e) Aplicación

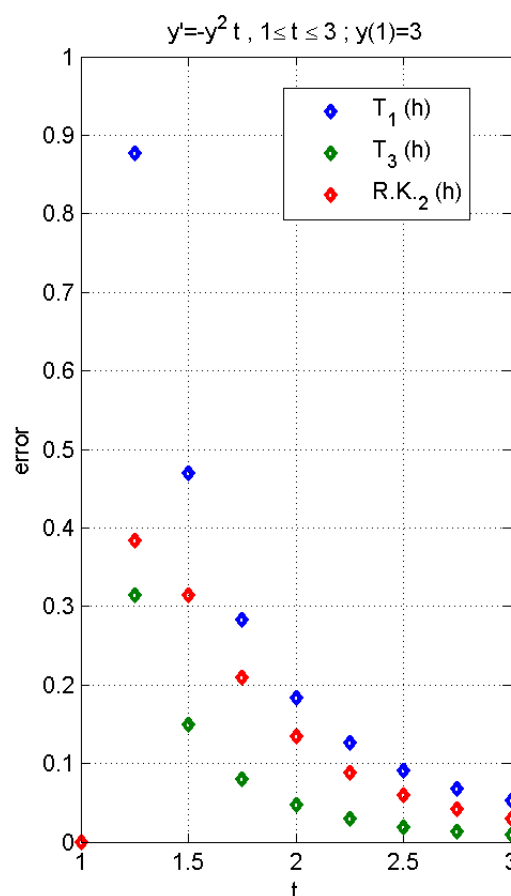
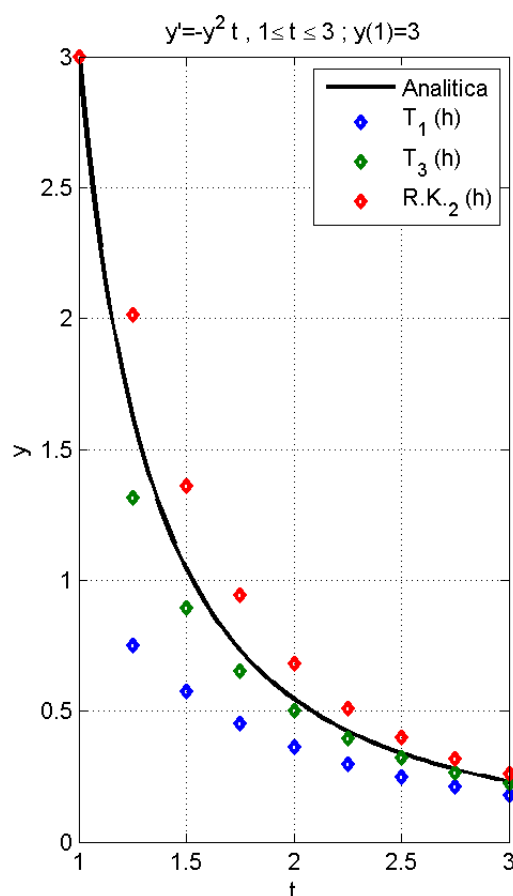
Representando los resultados de forma tabular y gráfica, se observa que el mas exacto es el de Runge-Kutta (orden 2), pese a que, en general (para valores de $h < 1$), el más exacto debería ser el de Taylor puesto que es el de mayor orden.

Solución	$t_0 = 1$	$t_1 = 2$	$t_2 = 3$
Euler	3.0	-6	-78
Taylor	3.0	-37.5	-1.614×10^7
Runge	3.0	-0.3750	-1.0397
Exacta	3.0	0.5455	0.2308



Si se hubieran repetido las operaciones tomando $h=0.25$ se verificaría la aseveración anterior:

Solución	$t_0 = 1$	$t_1 = 1.25$	$t_2 = 1.5$	$t_3 = 1.75$	$t_4 = 2$	$t_5 = 2.25$	$t_6 = 2.5$	$t_7 = 2.75$	$t_8 = 3$
Euler	3.0000	0.7500	0.5742	0.4506	0.3618	0.2963	0.2469	0.2088	0.1788
Taylor	3.0000	1.3125	0.8947	0.6532	0.4989	0.3939	0.3190	0.2636	0.2215
Runge	3.0000	2.0112	1.3574	0.9414	0.6794	0.5104	0.3970	0.3176	0.2601
Exacta	3.0000	1.6271	1.0435	0.7328	0.5455	0.4229	0.3380	0.2767	0.2308



Ejercicio 8.- Se considera el Problema de valor inicial $y'(t) = y + t$ $0 \leq t \leq 1$ con $y(0) = 0$

- Calcular la solución analítica exacta.
- Aplicar el método de Euler con paso $h = \frac{1}{2}$ para aproximar $y(1)$.
- Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3, así como su error local. Aplicarlo para calcular $y(1)$.
- Aplicar el método de Runge Kutta de orden 2: $w_{n+1} = w_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$ con $k_1 = hf(t_n, w_n)$ y $k_2 = hf(t_n + \alpha h, w_n + \beta k_1)$ tomando $\{c_1 = 0, c_2 = 1, \alpha = \beta = \frac{1}{2}\}$ ¿Cuál es la interpretación gráfica de este método?
- Comparar el error real cometido por todos los métodos ¿Cuál es más exacto en este caso? ¿Y cuál debería serlo, en general?

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 20 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (a) Solución exacta

La ecuación es lineal de primer orden, de la forma $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$. Cuya solución se obtiene obteniendo el factor integrante y resolviendo:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t)q(t)dt + c \right)$$

En este caso $y' - y = t$

$$\mu(t) = e^{\int -dt} = e^{-t}$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{-t}} \left(\int e^{-t} t dt + c \right) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-t} dt = dv & -e^{-t} = v \\ t = u & dt = du \end{array} \right\} = \frac{1}{e^{-t}} \left(-e^{-t} t - \int -e^{-t} dt + c \right) = -t - 1 + ce^t$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow y(t) = -t - 1 + e^t$$

Apartado (b) Aproximación utilizando Euler

El Método de Euler para el P.V.I. $y'(t) = f(t, y)$ $a \leq t \leq b$ con $y(a) = \alpha$ se escribe como:

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{con } w_0 = \alpha \text{ y } h = \frac{b-a}{n}.$$

Particularizando

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) = w_k + h(w_k + t_k) \quad 1 \leq k \leq 2 \quad w_0 = 0 \quad t_0 = 0 \quad h = \frac{1}{2}$$

$$t_1 = t_0 + h = \frac{1}{2} \quad w_1 = w_0 + h(w_0 + t_0) = 0 + \frac{1}{2}(0 + 0) = 0$$

$$t_2 = t_1 + h = 1 \quad w_2 = w_1 + h(w_1 + t_1) = 0 + \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

Apartado (c) Método de Taylor

Denotando por $t_n = a + nh$ y $y_n = y(t_n)$, el desarrollo de Taylor conduce a,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \frac{y'_n}{1!} + h^2 \frac{y''_n}{2!} + h^3 \frac{y'''_n}{3!} + h^4 \frac{y^{iv}_n}{4!} = \\ &= y_n + h \left(f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} f(t_n, y_n) \right) + h^4 \frac{y^{iv}_n}{4!} = \\ &= y_n + h \left(f + \frac{h}{2} \{ f_t + f_y f \} + \frac{h^2}{6} \{ f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y^2 f + f_y f_t \} \right) + O(h^4) \quad \text{con } \xi \in [t_n, t_{n+1}] \end{aligned}$$

La definición de error de truncamiento local viene dada por la expresión

$$\tau(h) = \frac{y_{n+1} - \{y_n + hT(t_n, y_n, h)\}}{h}$$

Para obtener el método es mucho más simple operar directamente en la expresión de f .

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 21 de 22
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{y'_n}{1!} + h^2 \frac{y''_n}{2!} + h^3 \frac{y'''_n}{3!} + h^4 \frac{y^{iv}_n}{4!} = \begin{cases} y' = y + t \\ y'' = y' + 1 = y + t + 1 \\ y''' = y'' + 1 = y + t + 1 \\ y^{iv} = y''' + 1 = y + t + 1 \end{cases} =$$

$$= y_n + h(y_n + t_n) + \frac{h^2}{2!}(y_n + t_n + 1) + \frac{h^3}{3!}(y_n + t_n + 1) + \frac{h^4}{4!}(y(\xi) + \xi + 1)$$

donde el error de truncamiento local es $\tau(h) = \frac{h^3}{4!}(y(\xi) + \xi + 1)$

Realizamos las evaluaciones, a partir de la expresión anterior

$$w_{n+1} = w_n + h(w_n + t_n) + \frac{h^2}{2!}(w_n + t_n + 1) + \frac{h^3}{3!}(w_n + t_n + 1) = 0 \leq k \leq 1 \quad w_0 = 0 \quad t_0 = 0 \quad h = \frac{1}{2}$$

$$= w_n \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!}\right) + t_n \left(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!}\right) + \left(\frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!}\right)$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \quad w_1 = w_0 \left(\frac{79}{48}\right) + t_0 \left(\frac{31}{48}\right) + \left(\frac{7}{48}\right) = 0 \left(\frac{79}{48}\right) + 0 \left(\frac{31}{48}\right) + \left(\frac{7}{48}\right) = \frac{7}{48} = 0.1458\dots$$

$$t_2 = 1 \quad w_2 = w_1 \left(\frac{79}{48}\right) + t_1 \left(\frac{31}{48}\right) + \left(\frac{7}{48}\right) = \frac{7}{48} \left(\frac{79}{48}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{31}{48}\right) + \left(\frac{7}{48}\right) = \frac{477}{673} = 0.7088\dots$$

Apartado (d) Método de Runge-Kutta de orden 2

Con los datos indicados, el método de Runge Kutta de Orden 2 viene indicado mediante

$$w_{n+1} = w_n + k_2 \quad k_1 = hf(t_n, w_n) \quad k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad 0 \leq n \leq 1$$

En esta expresión, k_1 aproxima la variación de la y con la x , multiplicando la variación de abscisas h por la pendiente calculada en el extremo izquierdo. Por su parte k_2 pretende evaluar la pendiente en el punto medio, por lo que los valores de (x, y) corresponden con $(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{1}{2}k_1)$. El método se conoce, obviamente, por el del Punto Medio.

$$t_0 = 0 \quad k_1 = h(w_n + t_n) \quad k_2 = h\left(w_n + \frac{1}{2}k_1 + t_n + \frac{1}{2}h\right) = w_0 = 0$$

$$= \frac{h}{2}(3w_n + 3t_n + h)$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}(w_0 + t_0) = 0 \quad \frac{1}{4}(3w_0 + 3t_0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{8} = 0.125 \quad w_1 = w_0 + k_2 = 0 + \left(\frac{1}{8}\right) = 0.125$$

$$t_2 = 1 \quad \frac{1}{2}(w_1 + t_1) = \frac{5}{15} = 0.3125 \quad \frac{1}{4}(3w_1 + 3t_1 + \frac{1}{2}) = \frac{33}{64} = 0.5156 \quad w_2 = w_1 + k_2 = \frac{1}{8} + \left(\frac{33}{64}\right) = \frac{41}{64} = 0.6406\dots$$

Apartado (e) Aplicación

Representando los resultados de forma tabular y gráfica, se observa que el más exacto es el de Taylor, lo que resulta razonable puesto que es el de mayor orden.

Solución	$t_0 = 0$	$t_1 = \frac{1}{2}$	$t_2 = 1$
Euler	0.0	0.0	0.25
Taylor	0.0	0.1458	0.7088
Runge	0.0	0.125	0.6406

Exacta	0.0	0.1487	0.7183
---------------	-----	--------	--------

