

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 1 de 3
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Se considera el P.V.I. $y'(t) = -y + 1$ $0 \leq t \leq 1$ con $y(0) = y_0$

- Calcular la solución analítica exacta
- Determinar, en función de la condición inicial y del paso h , la expresión del valor aproximado w_k utilizando el método de Euler.
- Demostrar que la solución aproximada tiende a la exacta cuando se aumenta el número de intervalos.
- Calcular el valor del tamaño de paso h para, usando aritmética exacta, poder asegurar un error menor que 0.1 cuando se toma $y_0 = 0$. Verificar que los 2 primeros términos verifican la cota de error. ¿Qué ocurre si se toma $y_0 = 1$?

Ejercicio 2.- Dado el problema de valor inicial $y'(t) = f(t, y)$ $a \leq t \leq b$ con $y(a) = A$

- Obtener la expresión general del método de Taylor de orden 2, indicando el valor del error de truncamiento local.
- Obtener las relaciones entre c_1 , c_2 , α y β para que el método de Runge-Kutta dado por $w_{n+1} = w_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$ con $k_1 = hf(t_n, w_n)$ y $k_2 = hf(t_n + \alpha h, w_n + \beta k_1)$ sea de orden 2. Determinar los valores que hacen mínimo el error de truncamiento local.
- Como aplicación, resolver $y'(t) = y - t + 1$ $0 \leq t \leq 1$ con $y(0) = 1$ y $h = 0.5$ por ambos métodos (Taylor y Runge-Kutta) y comparar el error cometido por ambos.

Ejercicio 3.- La velocidad de descenso de un paracaidista viene dada por $\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$, donde g es la constante gravitacional, m es la masa y c es el coeficiente de arrastre.

- Determinar, en función de la condición inicial y del paso h , la expresión del valor aproximado w_k utilizando el método de Euler.
- Calcular la solución analítica exacta. Demostrar que la solución aproximada tiende a la exacta cuando se aumenta el número de intervalos.
- Calcular el valor del tamaño de paso h para, usando aritmética exacta, poder asegurar un error menor que 0.1 cuando se toma $y_0 = 0$. Verificar que los 2 primeros términos verifican la cota de error. ¿Qué ocurre si se toma $y_0 = 1$?
- Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3 así como su error local.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 2 de 3
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 4.- Se considera el P.V.I. $y'(t) = -ty$ $0 \leq t \leq 1$ con $y(0) = y_0$

- Determinar, en función de la condición inicial y del paso h , la expresión del valor aproximado w_k utilizando el método de Euler.
- Calcular la solución analítica exacta. Demostrar que la solución aproximada tiende a la exacta cuando se aumenta el número de intervalos, esto es, $\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ kh=t}} w_k = y(t)$.
- Calcular el valor del tamaño de paso h para, usando aritmética exacta, poder asegurar un error menor que 0'1 cuando se toma $y_0 = 1$. Verificar que los 2 primeros términos verifican la cota de error. ¿Qué ocurre si se toma $y_0 = 0$?
- Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3, así como su error local

Ejercicio 5.- Se considera el Problema de valor inicial $y'(t) = -\frac{y}{t}$ $1 \leq t \leq 3$ con $y(1) = 3$

- Calcular la solución analítica exacta.
- Aplicar el método de Euler con paso $h=1$ para aproximar $y(3)$.
- Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3, así como su error local. Aplicarlo para calcular $y(3)$.
- Aplicar el método de Runge Kutta de orden 2: $w_{n+1} = w_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$ con $k_1 = hf(t_n, w_n)$ y $k_2 = hf(t_n + \alpha h, w_n + \beta k_1)$ tomando $\{c_1 = 0, c_2 = 1, \alpha = \beta = \frac{1}{2}\}$ ¿Cuál es la interpretación grafica de este método?
- Comparar el error real cometido por todos los métodos ¿Cuál es más exacto en este caso? ¿Y cuál debería serlo, en general?

Ejercicio 6.- Se considera el problema de valor inicial $y'(t) = \left(\frac{y}{t}\right)^2$ $2 \leq t \leq 5$ con $y(2) = 2$.

- Calcular la solución analítica exacta.
- Aplicar el método de Euler con paso $h=1$ para aproximar $y(5)$.
- Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3, así como su error local. Aplicarlo para calcular $y(5)$.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 3 de 3
	Tema	Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas de valor inicial)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

- (d) Aplicar el método de Runge Kutta de orden 2: $w_{n+1} = w_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$ con $k_1 = hf(t_n, w_n)$ y $k_2 = hf(t_n + \alpha h, w_n + \beta k_1)$ tomando $\{c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = 1\}$ ¿Cuál es la interpretación grafica de este método?
- (e) Comparar el error real cometido por todos los métodos ¿Cuál es más exacto en este caso? ¿Y cuál debería serlo, en general?

Ejercicio 7.- Se considera el problema de valor inicial $y'(t) = -y^2 t$ $1 \leq t \leq 3$ con $y(1) = 2$.

- (a) Calcular la solución analítica exacta.
- (b) Aplicar el método de Euler con paso $h=1$ para aproximar $y(3)$.
- (c) Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3, así como su error local. Aplicarlo para calcular $y(3)$.
- (d) Aplicar el método de Runge Kutta de orden 2: $w_{n+1} = w_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$ con $k_1 = hf(t_n, w_n)$ y $k_2 = hf(t_n + \alpha h, w_n + \beta k_1)$ tomando $\{c_1 = 0, c_2 = 1, \alpha = \beta = \frac{1}{2}\}$ ¿Cuál es la interpretación grafica de este método?
- (e) Comparar el error real cometido por todos los métodos ¿Cuál es más exacto en este caso? ¿Y cuál debería serlo, en general?

Ejercicio 8.- Se considera el Problema de valor inicial $y'(t) = y + t$ $0 \leq t \leq 1$ con $y(0) = 0$

- (a) Calcular la solución analítica exacta.
- (b) Aplicar el método de Euler con paso $h=\frac{1}{2}$ para aproximar $y(1)$.
- (c) Obtener la expresión del método de Taylor de orden 3, así como su error local. Aplicarlo para calcular $y(1)$.
- (d) Aplicar el método de Runge Kutta de orden 2: $w_{n+1} = w_n + c_1 k_1 + c_2 k_2$ con $k_1 = hf(t_n, w_n)$ y $k_2 = hf(t_n + \alpha h, w_n + \beta k_1)$ tomando $\{c_1 = 0, c_2 = 1, \alpha = \beta = \frac{1}{2}\}$ ¿Cuál es la interpretación grafica de este método?
- (e) Comparar el error real cometido por todos los métodos ¿Cuál es más exacto en este caso? ¿Y cuál debería serlo, en general?