



Titulación: Grado en Ingeniería
Asignatura: Métodos Numéricos
Autor: César Menéndez

Ultima actualización: 21/03/2011

Derivación e Integración Numérica

Planificación:

Materiales:

Conocimientos previos:

2 Teoría+1 Prácticas+2 Laboratorio
MATLAB
T^{mas}. básicos de Cálculo –
Desarrollos de Taylor – Sistemas
lineales –



Descripción del problema

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Fórmulas Derivac.
- Extrapolación*
- Estab. Derivación
- Reglas NewtonCotes
- Cuadratura Gauss.*
- Otras integrales*
- Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

- Evaluación de la derivada en un punto o de la integral de una función en un intervalo a partir de los valores de la función
 - Función muy compleja (difícil de calcular su integral)
 - No se conoce la función sino sólo sus valores en algunos puntos
 - No existe la primitiva de la función
 - ...
- Fórmulas de derivación e integración numérica

$$f^{(n)}(x) \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \qquad \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

- Obtención de los valores de los coeficientes
- Determinación del error cometido



Ejemplo

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Fórmulas Derivac.
- Extrapolación*
- Estab. Derivación
- Reglas NewtonCotes
- Cuadratura Gauss.*
- Otras integrales*
- Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

- Evaluación de la derivada en un punto o de la integral de una función en un intervalo a partir de los valores de la función
 - Función muy compleja (difícil de calcular su integral)
 - No se conoce la función sino sólo sus valores en algunos puntos
 - No existe la primitiva de la función
 - ...
- Fórmulas de derivación e integración numérica

$$f^{(n)}(x) \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \qquad \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

- Obtención de los valores de los coeficientes
- Determinación del error cometido



Objetivos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Fórmulas Derivac.
- Extrapolación*
- Estab. Derivación
- Reglas NewtonCotes
- Cuadratura Gauss.*
- Otras integrales*
- Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

- Conocer las diferentes formas de obtener las fórmulas numéricas
 - Interpolación
 - Coeficientes indeterminados
 - Desarrollo de Taylor o polinomios ortogonales
- Aprender a obtener el error de la fórmulas
- Reconocer las ventajas de las fórmulas centradas
- Aprender la motivación de la extrapolación de Richardson
- Comprender que el error en la derivación numérica depende no solo de la fórmula numérica y de la función a derivar sino del punto en que se calcula y del valor de espaciado h .
- Entender cómo se aplica el algoritmo de integración de Romberg.
- Entender la diferencia fundamental entre las fórmulas de Newton-Cotes y la cuadratura gaussiana.
- Comprender el funcionamiento de la integración adaptativa
- Aplicar las reglas a integrales impropias o múltiples



Planteamiento y definiciones

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

- Fórmulas de derivación numérica

$$f'(a) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) + error \rightarrow f'(a) \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

- Fórmulas de integración numérica

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) + error \rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

- Procedimiento

- Obtención de los valores de los coeficientes
- Determinación o acotación del error cometido

- Error

- Una fórmula es de orden n cuando es exacta para polinomios de grado menor o igual que n

$$f(x) = x^k, k = 0, 1, \dots, n \Rightarrow error = 0$$

- El error de truncamiento de la fórmula es

$$O(h^k): \lim_{h \rightarrow 0} \frac{error}{h^k} = cte \quad o(h^k): \lim_{h \rightarrow 0} \frac{error}{h^k} = 0$$

- Se denomina parte principal del error de truncamiento al infinitésimo de menor orden

$$error = \underbrace{k_1 h^2}_{\text{parte principal}} + k_2 h^5 + k_3 h^6$$



Ejemplo

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

- La siguiente fórmula de derivación es de orden 1 y con error de truncamiento $O(h)$

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f^{(2)}(\xi_0)}{2!} h = RN(h) + O(h)$$

$$\begin{array}{lll} f(x) = 1 & f(x) = x & f(x) = x^2 \\ 0 = \frac{1}{h}[1-1] & 1 = \frac{1}{h}[(a+h)-(a)] & 2a \neq \frac{1}{h}[(a+h)^2 - (a)^2] = 2a + h \end{array}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{error}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a) - RN(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{f^{(2)}(\xi_0)}{2!} h}{h} = -\frac{f^{(2)}(\xi_0)}{2!}$$

- La siguiente fórmula de integración es de orden 1 y con error de truncamiento $O(h^3)$

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + f''(\eta) \frac{1}{24} h^3 = RN(h) + O(h^3)$$

$$\begin{array}{lll} f(x) = 1 & f(x) = x & f(x) = x^2 \\ (b-a) = 1(b-a) & \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}(b-a) & \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \neq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{1}{12}(b-a)^3 \end{array}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{error}}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^b f(x) dx - RN(h)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f''(\eta) \frac{1}{24} h^3}{h^3} = -\frac{1}{24} f''(\eta)$$



Obtención de las fórmulas: Derivación

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

- Fórmulas de tipo interpolatorio
 - Derivando los polinomios de interpolación (habitualmente con puntos equiespaciados)

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \rightarrow f'(x) = P'_n(x) + E'_n(x)$$

- Métodos de desarrollo de Taylor
 - Desarrollando por Taylor en torno al punto de derivación y eliminando los términos no deseados

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(\xi)\frac{h^2}{2!} \rightarrow f'(a) = \frac{1}{h} [f(a+h) - f(a)] - f''(\xi)\frac{h}{2}$$

- Método de coeficientes indeterminados
 - Plantean un sistema de ecuaciones, dependiendo del orden de la fórmula, cuya resolución permite obtener los coeficientes

$$f(x) = x^k, k=1,2,\dots: f'(a) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$



Obtención de las fórmulas: Integración

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

- Fórmulas de Newton-Cotes

- Integrando los polinomios de interpolación (habitualmente con puntos equiespaciados)

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_n(x) dx + \int_a^b E_n(x) dx$$

- Fórmulas de cuadratura gaussiana

- Utilizando las raíces de polinomios ortogonales como puntos de interpolación (Dependen del intervalo y de la función)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_{2n+1}(x) dx + error = \int_a^b R_n(x) dx + error$$

- Método de coeficientes indeterminados

- Plantean un sistema de ecuaciones, dependiendo del orden de la fórmula, cuya resolución permite obtener los coeficientes

$$f(x) = x^k, k = 1, 2, \dots: \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$



Formulas de tipo interpolatorio

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

F. Interpolatorias

- Derivadas primeras

- Der. Orden superior

Desarrollo Taylor

Coeficientes indeterminados.

- Se definen por el número de puntos del polinomio de interpolación
- Las fórmulas genéricas se toman para puntos equiespaciados, aunque su método de obtención es válido para cualesquiera puntos

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

$$f'(x) = P'_n(x) + e(x) \rightarrow e(x) = \frac{d}{dx} E_n(x)$$

- Acotación del error

$$e(x) = \frac{d}{dx} E_n(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{df^{(n+1)}(\xi_x)}{dx} \prod_{k=0}^n (x - x_k) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

$$\text{siendo } \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} \prod_{k=0}^n (x - x_k) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \sum_{j=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k)$$

- No es posible la acotación para cualquier valor de x
- Se acota en uno de los puntos de interpolación

$$e(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k)$$



Derivadas primeras (2 y 3)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

F. Interpolatorias

- Derivadas primeras

- Der. Orden superior

Desarrollo Taylor

Coeficientes indeterminados.

● 2 puntos

$$P_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \rightarrow P_1'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$e(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k) \rightarrow e(x_0) = -\frac{f^{(2)}(\xi_0)}{2!} (x_1 - x_0)$$

- Equiespaciados

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f^{(2)}(\xi_0)}{2!} h$$

● 3 puntos

$$P_2(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$P_2'(x) = f(x_0) \frac{(2x - x_1 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(2x - x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(2x - x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

- Equiespaciados

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(-\frac{3}{2} f(x_0) + 2f(x_0 + h) - \frac{1}{2} f(x_0 + 2h) \right) + \frac{f^{(3)}(\xi_0)}{3} h^2$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h} (f(x_1 + h) - f(x_1 - h)) - \frac{f^{(3)}(\xi_0)}{6} h^2$$



Derivadas primeras: (4 y 5)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

F. Interpolatorias

- Derivadas primeras

- Der. Orden superior

Desarrollo Taylor

Coeficientes indeterminados.

● 4 puntos

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11f(x_0) + 18f(x_0 + h) - 9f(x_0 + 2h) + 2f(x_0 + 3h)) - \frac{f^{(4)}(\xi_0)}{4}h^3$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h}(-2f(x_1 - h) - 3f(x_1) + 6f(x_1 + h) - f(x_1 + 2h)) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{12}h^3$$

● 5 puntos

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}(-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)) + \frac{f^{(5)}(\xi_0)}{5}h^4$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{24h}(-6f(x_1 - h) - 20f(x_1) + 36f(x_1 + h) - 12f(x_1 + 2h) + 2f(x_1 + 3h)) - \frac{f^{(5)}(\xi_1)}{20}h^4$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}(f(x_2 - 2h) - 8f(x_2 - h) + 8f(x_2 + h) - f(x_2 + 2h)) + \frac{f^{(5)}(\xi_2)}{30}h^4$$



Aplicación: $f(x)=\cos(x)$, calcular $f'(\pi/4)$ tomando $h=0.5$ y $h=0.1$

$$f'(\pi/4) = -\sin(\pi/4) \approx -0.7071$$

Pts	h=0.5	h=0.1
2	$\frac{\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \cos(\frac{\pi}{4})}{0.5} \approx -0.8511$	-0.7413
3	$\frac{1}{0.5} \left(-\frac{3}{2} \cos(\frac{\pi}{4}) + 2 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{4} + 1) \right) = -0.7822$	-0.7096
	$\frac{1}{1} \left(\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) \right) \approx -0.6780$	-0.7059
4	$\frac{1}{3} \left(-11 \cos(\frac{\pi}{4}) + 18 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - 9 \cos(\frac{\pi}{4} + 1.0) + 2 \cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) \right) \approx -0.7015$	-0.7070
	$\frac{1}{3} \left(-2 \cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) - 3 \cos(\frac{\pi}{4}) + 6 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \cos(\frac{\pi}{4} + 1) \right) \approx -0.7127$	-0.7072
5	$\frac{1}{6} \left(-25 \cos(\frac{\pi}{4}) + 48 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - 36 \cos(\frac{\pi}{4} + 1) + 16 \cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) - 3 \cos(\frac{\pi}{4} + 2) \right) \approx -0.6951$	-0.7071
	$\frac{1}{12} \left(-6 \cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) - 20 \cos(\frac{\pi}{4}) + 36 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \cos(\frac{\pi}{4} + 1) + 2 \cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) \right) \approx -0.7099$	-0.7071
	$\frac{1}{6} \left(f \cos(\frac{\pi}{4} - 1) - 8 \cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) + 8 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \cos(\frac{\pi}{4} + 1) \right) \approx -0.7057$	-0.7071

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

F. Interpolatorias

- Derivadas primeras

- Der. Orden superior

Desarrollo Taylor

Coeficientes indeterminados.



Derivadas orden superior: Taylor

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

F. Interpolatorias

- Derivadas primeras

- Der. Orden superior

Desarrollo Taylor

Coeficientes indeterminados.

- Fórmulas interpolatorias: acotación del error

$$e(x) = \frac{d^2}{dx^2} E_n(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^2 f^{(n+1)}(\xi_x)}{dx^2} \prod_{k=0}^n (x - x_k) +$$

$$+ 2 \frac{1}{(n+1)!} \frac{df^{(n+1)}(\xi_x)}{dx} \frac{d}{dx} \prod_{k=0}^n (x - x_k) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \frac{d^2}{dx^2} \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

– ¡ No se anula en los puntos de interpolación !

- Taylor:

– Plantea la obtención de las derivadas de cualquier orden en un punto a partir del desarrollo de Taylor de la función en otros puntos próximos

- Proceso:

– Desarrollar en serie en los puntos conocidos en torno al valor deseado

– Combinar las expresiones anteriores, anulando todos los términos posibles

– Obtener la expresión final de la fórmula y el error (cuando sea posible)



Taylor para derivadas primeras y segundas

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

F. Interpolatorias

- Derivadas primeras

- Der. Orden superior

Desarrollo Taylor

Coeficientes indeterminados.

- Obtener, utilizando el desarrollo en serie de Taylor, una fórmula numérica para calcular $f'(a)$ y $f''(a)$ a partir de los valores de $f(x)$ en $\{a-h, a, a+h\}$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2!}h^2 f''(a) + \frac{1}{3!}h^3 f'''(a) + \dots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(\xi_1) \quad (I)$$

$$f(a-h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2!}h^2 f''(a) + \frac{1}{3!}h^3 f'''(a) + \dots + \frac{1}{n!}(-h)^n f^{(n)}(\xi_2) \quad (II)$$

- Combinamos los desarrollos: $\alpha(I) + \beta(II)$ y anulamos los términos no deseados

$$h^0: \quad \alpha f(a+h) + \beta f(a-h) - (\alpha + \beta) f(a)$$

$$h^1: \quad f'(a)(\alpha - \beta)$$

$$h^2: \quad \frac{1}{2!} f''(a)(\alpha + \beta)$$

$$h^{2k-1}: \quad \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(a)(\alpha - \beta)$$

$$h^{2k}: \quad \frac{1}{2k!} f^{(2k)}(a)(\alpha + \beta)$$

- Derivada 1ª: anula términos en h^2 ($\alpha = -\beta$)

$$\alpha f(a+h) - \alpha f(a-h) = 2\alpha f'(a)h + \alpha \frac{1}{3!}h^3 (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(a) = \frac{1}{2h} (f(a+h) - f(a-h)) - \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi)$$

- Derivada 2ª: anula términos en h ($\alpha = \beta$)

$$\alpha f(a+h) + \alpha f(a-h) - 2\alpha f(a) = \alpha f''(a)h^2 + \alpha \frac{1}{4!}h^4 (f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)) \rightarrow$$

$$\rightarrow f''(a) = \frac{1}{h^2} (f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)) - \frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\xi)$$

- Derivada 3ª: No tiene sentido



Derivadas de orden superior (2)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

F. Interpolatorias

- Derivadas primeras

- Der. Orden superior

Desarrollo Taylor

Coeficientes indeterminados.

• Derivada segunda

- Laterales

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)) + O(h)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (2f(x_0) - 5f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3)) + O(h^2)$$

- Centradas

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (f(x_{-1}) - 2f(x_0) + f(x_1)) + O(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{12h^2} (-f(x_{-2}) + 16f(x_{-1}) - 30f(x_0) + 16f(x_1) - f(x_2)) + O(h^4)$$

• Ejemplo

- $f(x) = \cos(x)$, calcular la derivada segunda en $\pi/4$ tomando $h=0.5$ y $h=0.1$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx -0.7071$$

Pts	Cent.	h=0.5	h=0.1
3	No	$\frac{1}{0.5^2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \right) \approx -0.2757$	-0.6325
3	Si	$\frac{1}{0.5^2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0.5\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) \right) \approx -0.6925$	-0.7065
4	No	$\frac{1}{0.5^2} \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 5\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1.5\right) \right) \approx -0.7600$	-0.7128
5	Si	$\frac{1}{3} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + 16\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0.5\right) - 30\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 16\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \right) \approx -0.7066$	-0.7071



Derivadas de orden superior (3)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

F. Interpolatorias

- Derivadas primeras

- Der. Orden superior

Desarrollo Taylor

Coeficientes indeterminados.

• Derivada tercera

- Laterales

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3} (-f(x_0) + 3f(x_1) - 3f(x_2) + f(x_3)) + O(h)$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{2h^3} (-5f(x_0) + 18f(x_1) - 24f(x_2) + 14f(x_3) - 3f(x_4)) + O(h^2)$$

- Centradas

$$f'''(x_0) = \frac{1}{2h^3} (-f(x_{-2}) + 2f(x_{-1}) - 2f(x_1) + f(x_2)) + O(h^2)$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{8h^3} (f(x_{-3}) - 8f(x_{-2}) + 13f(x_{-1}) - 13f(x_1) + 8f(x_2) - f(x_3)) + O(h^4)$$

• Ejemplo

- $f(x) = \cos(x)$, calcular la derivada tercera en $\pi/4$ tomando $h=0.5$ y $h=0.1$

$$f'''(\pi/4) = \sin(\pi/4) \approx 0.7071$$

Pts	Cent.	$h=0.5$	$h=0.1$
4	No	$\frac{1}{0.5^3} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1.5\right) \right) \approx 0.9686$	0.8038
5	No	$\frac{1}{0.5^2} \left(-5\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 18\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) - 24\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) + 14\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1.5\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\right) \right) \approx 1.1217$	0.7211
5	Si	$\frac{1}{0.5^2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0.5\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \right) \approx 0.6640$	0.7053
7	Si	$\frac{1}{1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 1.5\right) - 8\cos\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + 13\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0.5\right) - 13\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) + 8\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1.5\right) \right) \approx 0.7046$	0.7071



Derivadas de orden superior (4)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

F. Interpolatorias

- Derivadas primeras

- Der. Orden superior

Desarrollo Taylor

Coeficientes indeterminados.

• Derivada cuarta

- Laterales

$$f^{iv}(x_0) = \frac{1}{h^4} (f(x_0) - 4f(x_1) + 6f(x_2) - 4f(x_3) + f(x_4)) + O(h)$$

$$f^{iv}(x_0) = \frac{1}{h^4} (3f(x_0) - 14f(x_1) + 26f(x_2) - 24f(x_3) + 11f(x_4) - 2f(x_5)) + O(h^2)$$

- Centradas

$$f^{iv}(x_0) = \frac{1}{h^4} (f(x_{-2}) - 4f(x_{-1}) + 6f(x_0) - 4f(x_1) + f(x_2)) + O(h^2)$$

$$f^{iv}(x_0) = \frac{1}{6h^4} (-f(x_{-3}) + 12f(x_{-2}) - 39f(x_{-1}) + 56f(x_0) - 39f(x_1) + 12f(x_2) - f(x_3)) + O(h^4)$$

• Ejemplo

- $f(x) = \cos(x)$, calcular la derivada cuarta en $\pi/4$ tomando $h=0.5$ y $h=0.1$

$$f^{iv}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7071$$

Pts	Cent.	$h=0.5$	$h=0.1$
5	No	$\frac{1}{0.5^4} (\cos(\frac{\pi}{4}) - 4\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) + 6\cos(\frac{\pi}{4} + 1) - 4\cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) + \cos(\frac{\pi}{4} + 2)) \approx -0.2042$	0.5516
5	Si	$\frac{1}{0.5^4} (\cos(\frac{\pi}{4} - 1) - 4\cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) + 6\cos(\frac{\pi}{4}) - 4\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) + \cos(\frac{\pi}{4} + 1)) \approx 0.6782$	0.7059
6	No	$\frac{1}{0.5^4} \left(3\cos(\frac{\pi}{4}) - 14\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) + 26\cos(\frac{\pi}{4} + 1) - 24\cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) + 11\cos(\frac{\pi}{4} + 2) - 2\cos(\frac{\pi}{4} + 2.5) \right) \approx 0.6443$	0.7223
7	Si	$\frac{8}{3} \left(-\cos(\frac{\pi}{4} - 1.5) + 12\cos(\frac{\pi}{4} - 1) - 39\cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) + 56\cos(\frac{\pi}{4}) - 39\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) + 12\cos(\frac{\pi}{4} + 1) - \cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) \right) \approx 0.7059$	0.7071



El método de Coeficientes Indeterminados

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

F. Interpolatorias

- Derivadas primeras

- Der. Orden superior

Desarrollo Taylor

Coeficientes indeterminados.

- Fija los puntos de la fórmula
- Parte de una relación de coeficientes
- Plantea un sistema para que la fórmula sea exacta para el mayor orden posible (grado del polinomio)
- Obtiene el orden del error

$$f'(a) \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 & 0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i \\ f(x) = x & 1 = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \\ f(x) = x^2 & 2a = \sum_{i=0}^n \alpha_i (x_i)^2 \\ \vdots & \vdots \\ f(x) = x^n & na^{n-1} = \sum_{i=0}^n \alpha_i (x_i)^n \end{cases}$$



Ejemplo de obtención por coef. Indet.

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

- Calcular $f''(a)$ a partir del valor de $f(x)$ en $\{a-h, a, a+h\}$

– Sistema

$$f''(a) \approx \alpha_1 f(a-h) + \alpha_2 f(a) + \alpha_3 f(a+h) \rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 & 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ f(x) = x & 0 = \alpha_1(a-h) + \alpha_2(a) + \alpha_3(a+h) \\ f(x) = x^2 & 2 = \alpha_1(a-h)^2 + \alpha_2(a)^2 + \alpha_3(a+h)^2 \end{cases}$$

– Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (a-h) & (a) & (a+h) \\ (a-h)^2 & (a)^2 & (a+h)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/h^2 \\ \alpha_2 = -2/h^2 \\ \alpha_3 = 1/h^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(a) \approx \frac{1}{h^2} [f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)]$$

– ¿Orden?

$$f(x) = x^3 \quad 6a = \frac{1}{h^2} [(a-h)^3 - 2(a)^3 + (a+h)^3]$$

$$f(x) = x^4 \quad 12a^2 \neq \frac{1}{h^2} [(a-h)^4 - 2(a)^4 + (a+h)^4] = 12a^2 + 2h^2$$

F. Interpolatorias

- Derivadas primeras

- Der. Orden superior

Desarrollo Taylor

Coeficientes indeterminados.



Extrapolación de Richardson: obtención de fórmulas de mayor orden

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Sea M un valor exacto y $N_0(h)$ la fórmula numérica que lo aproxima dependiendo del parámetro h , pudiéndose expresar como

$$M = N_0(h) + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \cdots k_n h^n + \cdots = N_0(h) + O(h) \quad (I)$$

Donde los coeficientes son constantes. Aplicándola para $\frac{1}{2}h$, se tiene

$$M = N_0\left(\frac{1}{2}h\right) + k_1 \frac{1}{2}h + k_2 \left(\frac{1}{2}h\right)^2 + k_3 \left(\frac{1}{2}h\right)^3 + \cdots k_n \left(\frac{1}{2}h\right)^n + \cdots \quad (II)$$

y anulando entre ambas expresiones los términos en h^1 : $2(II)-(I)$,

$$\begin{aligned} M &= \left[2N_0\left(\frac{1}{2}h\right) - N_0(h) \right] + h^2 k_2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \right] + k_3 h^3 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 \right] + \cdots k_n h^n \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right] + \cdots \\ &= N_1(h) + \bar{k}_2 h^2 + \bar{k}_3 h^3 + \cdots \bar{k}_n h^n + \cdots = N_1(h) + O(h^2) \end{aligned} \quad (I)$$

se consigue aumentar la precisión de la fórmula. Repitiendo el proceso para anular h^2 :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4-1} \left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) \right] + \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1\right]}{4-1} k_3 h^3 + \cdots \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right]}{4-1} k_n h^n + \cdots \\ &= N_2(h) + \tilde{k}_3 h^3 + \cdots \tilde{k}_n h^n + \cdots = N_2(h) + O(h^3) \end{aligned} \quad (IV)$$

Y por inducción se llega a

$$M = N_n(h) + O(h^{n+1}) \quad \text{donde}$$

$$N_n(h) = \frac{2^n N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{n-1}(h)}{2^n - 1} = N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{n-1}(h)}{2^n - 1}$$



Ejemplo

Dada la fórmula de derivación numérica

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \dots + k_n h^n + \dots = N_0(h) + O(h) \quad (I)$$

Aplicar la extrapolación de Richardson, tomado $f(x) = \cos(x)$ para calcular $f'(\pi/4)$ tomando $h=0.5$. Compararla con la solución exacta: -0.7071

En este caso

$$M = N_n(h) + O(h^{n+1}) \quad \text{donde} \quad N_n(h) = N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{n-1}(h)}{2^n - 1}$$

h	$N_0(h)$	$N_1(h)$	$N_2(h)$	$N_3(h)$	$N_4(h)$
0.5	-0.8511				
0.25	-0.7877	-0.7243			
0.125	-0.7494	-0.7111	-0.7067		
0.0625	-0.7287	-0.7081	-0.7071	-0.7071	
0.03125	-0.7180	-0.7073	-0.7071	-0.7071	-0.7071

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software



Obtención de fórmulas de mayor orden

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

- NOTA: Si la formula fuera

$$M = N_0(h) + k_1 h^2 + k_2 h^4 + k_3 h^6 + \dots + k_n h^{2n} + \dots = N_0(h) + O(h^2) \quad (I)$$

- Este proceso generaría la relación

$$M = N_n(h) + O(h^{2n+2}) \quad \text{donde}$$

$$N_n(h) = \frac{4^n N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{n-1}(h)}{4^n - 1} = N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{n-1}(h)}{4^n - 1}$$

- Aplicar al ejemplo anterior tomando

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + k_1 h^2 + k_2 h^4 + k_3 h^6 + \dots + k_n h^{2n} + \dots = N_0(h) + O(h^2) \quad (I)$$

h	$N_0(h)$	$N_1(h)$	$N_2(h)$	$N_3(h)$	$N_4(h)$
0.5	-0.6780				
0.25	-0.6998	-0.7070			
0.125	-0.7053	-0.7071	-0.7072		
0.0625	-0.7066	-0.7071	-0.7071	-0.7071	
0.03125	-0.7070	-0.7071	-0.7071	-0.7071	-0.7071



Inestabilidad numérica de la derivación

➤ Motivación

➤ Objetivos

con

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Partiendo de la fórmula de derivación numérica

$$f'(a) = N(a, h) - \frac{h^2}{3!} \cdot f'''(\xi) \quad \text{con} \quad N(a, h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2 \cdot h}$$

pero al operar con aritmética finita, se evalúa

$$\tilde{N}(a, h) = \frac{\tilde{f}(a+h) - \tilde{f}(a-h)}{2 \cdot h} \cong \frac{f(a+h) + \varepsilon_1 - f(a-h) + \varepsilon_2}{2 \cdot h} \quad \text{donde} \quad |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| < \varepsilon$$

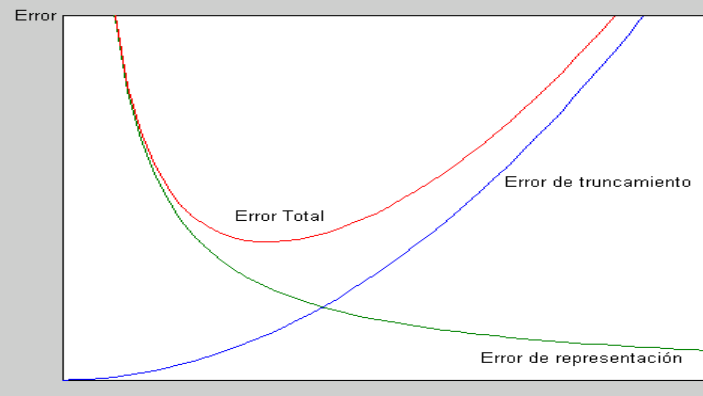
siendo ε el error de representación del ordenador. El error total es por tanto

$$E(h) = |f'(a) - \tilde{N}(a, h)| \leq |f'(a) - N(a, h)| + |N(a, h) - \tilde{N}(a, h)| = \frac{h^2}{3!} \cdot M + \frac{\varepsilon}{h} \quad \text{con} \quad M = \sup_{a-h \leq x \leq a+h} |f'''(x)|$$

que tiene un mínimo para $h_{\text{opt}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \varepsilon}{M}}$

Por tanto la precisión no mejora indefinidamente con la disminución del valor de h .

En la práctica no podemos calcular el valor de h óptimo, ya que la cota del error de representación depende de la máquina y M depende de la función y del intervalo en estudio.





Introducción

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad

● Teorema del valor medio para integrales

Sean $f(x), g(x) \in C[a, b]$ donde $g(x)$ es integrable y no cambia de signo en $[a, b]$, entonces existe un punto c en (a, b) tal que

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

- Son formulas de tipo interpolatorio que se definen por el número de puntos del polinomio de interpolación

- Las fórmulas genéricas se toman para puntos equiespaciados, aunque su método de obtención es válido para cualesquiera puntos

- Motivación

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \rightarrow \begin{cases} P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x) : L_i^n(x) \\ E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_n(x) dx + e(x) \rightarrow e(x) = \int_a^b E(x) dx$$



Método de coeficientes indeterminados

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Fórmulas Derivac.
- Extrapolación*
- Estab. Derivación
- Reglas NewtonCotes
- Cuadratura Gauss.*
- Otras integrales*
- Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad

Obtener los coeficientes de la siguiente fórmula para que tenga el mayor orden posible

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \alpha_0 f\left(\frac{1}{4}\right) + \alpha_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha_2 f\left(\frac{3}{4}\right)$$

Planteamiento: debe ser exacta para polinomios del mayor orden, luego comenzamos en orden creciente

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_0^1 1 dx = 1 = \alpha_0 1 + \alpha_1 1 + \alpha_2 1$$

$$f(x) = x \rightarrow \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = \alpha_0 \left(\frac{1}{4}\right) + \alpha_1 \left(\frac{1}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = \alpha_0 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \alpha_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Resolución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 0.75 \\ 0.25^2 & 0.5^2 & 0.75^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{2}{3} \\ \alpha_1 = -\frac{1}{3} \\ \alpha_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \int_0^1 f(x) dx \approx \frac{2}{3} f\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{3}{4}\right)$$

Orden de la fórmula

$$f(x) = x^3 \rightarrow \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = x^4 \rightarrow \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \stackrel{?}{=} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^4 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{37}{192}$$

Fórmula de orden 3



Ejemplos de reglas simples

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad

● Interpolante de grado 0

– Valor en el extremo del intervalo

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a) dx + \int_a^b f'(\xi)(x-a) dx = f(a)(b-a) + f'(\eta) \frac{(b-a)^2}{2}$$

– Valor en el punto medio

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx + \int_a^b f\left[\frac{a+b}{2}, x\right] \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + f''(\eta) \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

$$\text{como } f[x, x_0] = f[x, x_0, x_1](x - x_1) + f[x_0, x_1] \text{ y } \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = 0$$

$$\int_a^b f\left[\frac{a+b}{2}, x\right] \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = \int_a^b f\left[\frac{a+b}{2}, x, x_1\right] (x - x_1) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = \left\{x_1 = \frac{a+b}{2}\right\} =$$

$$= f\left[\frac{a+b}{2}, \zeta, x_1\right] \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3} \Bigg|_a^b$$

● Interpolante de grado 1

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_1(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b) dx$$

$$\int_a^b P_1(x) dx = f(a) \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx + f(b) \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a)$$

$$\frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b) dx = \frac{1}{2} f''(\eta) \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$$



Ejemplos de reglas simples

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad

● Interpolante de grado 2

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_2(x) dx + \int_a^b \frac{1}{3!} f'''(\xi)(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b) dx$$

– Combinamos trapecio y punto medio

$$RT \quad \int_a^b P_2(x) dx = \frac{P_2(a) + P_2(b)}{2}(b-a) - \frac{(b-a)^3}{12} P_2''(\eta)$$

$$RPM \quad \int_a^b P_2(x) dx = P_2\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 P_2''(\eta)$$

$$RT + 2RPM \quad 3\int_a^b P_2(x) dx = \frac{b-a}{2}\left(P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b)\right)$$

$$RSimpson \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$\text{como } f\left[x, a, \frac{a+b}{2}, b\right] = f\left[x, a, \frac{a+b}{2}, b, x_3\right](x-x_3) + f\left[a, \frac{a+b}{2}, b, x_3\right]y \int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{3!} f'''(\xi)(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b) dx &= \int_a^b f\left[x, a, \frac{a+b}{2}, b, \frac{a+b}{2}\right](x-\frac{a+b}{2})(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b) dx = \\ &= \frac{f^{iv}(\eta)}{6} \frac{2}{30} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \end{aligned}$$



Reglas cerradas

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad

El polinomio de interpolación **SI** incluye los extremos del intervalo

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \quad x_0 = a, x_n = b \quad x_k = x_0 + kh \quad h = \frac{b-a}{n}$$

- Tma: Dada una fórmula cerrada de $n+1$ puntos el error es

$$\frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n s^2 (s-1) \cdots (s-n) ds \quad n \text{ par} \quad \xi \in (a, b)$$

$$\frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n s (s-1) \cdots (s-n) ds \quad n \text{ impar}$$

- Fórmulas cerradas usuales

$n=1$	$\frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$	Regla del trapecio
$n=2$	$\frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$	Regla de Simpson
$n=3$	$\frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$	
$n=4$	$\frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$	R. Boole



Ejemplo

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad

n=1	$\frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] = \frac{(\pi/2 - 0)}{2} [\cos(0) + \cos(\pi/2)] = \pi/4 (1 - 0) = \pi/4 \approx 0.7854$ $Error \leq \left -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \right = \frac{(\pi/2 - 0)^3}{12} = 0.3230$
n=2	$\frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \frac{\pi/4}{3} [\cos(0) + 4\cos(\pi/4) + \cos(\pi/2)] \approx 1.0023$ $Error \leq \left -\frac{h^5}{90} f^{iv}(\xi) \right = \frac{(\pi/4)^5}{90} = 0.0033$
n=3	$\frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] = \frac{3\pi/6}{8} [\cos(0) + 3\cos(\pi/6) + 3\cos(\pi/3) + \cos(\pi/2)] \approx 1.001$ $Error \leq \left -\frac{3h^5}{80} f^{iv}(\xi) \right = \frac{3(\pi/6)^5}{80} = 0.0015$
n=4	$\frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] =$ $= \frac{2\pi/8}{45} [7\cos(0) + 32\cos(\pi/8) + 12\cos(\pi/4) + 32\cos(3\pi/8) + 7\cos(\pi/2)] \approx 1.000$ $Error \leq \left -\frac{8h^7}{845} f^{vi}(\xi) \right = \frac{8(\pi/8)^5}{845} = 1.2192 \cdot 10^{-5}$



Reglas abiertas

El polinomio de interpolación **NO** incluye los extremos del intervalo

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \quad x_0 = a + h, x_n = b - h \quad x_k = x_0 + kh \quad h = \frac{b-a}{n+2}$$

- Tma: Dada una fórmula abierta de $n+1$ puntos el error es

$$\frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} s^2 (s-1) \cdots (s-n) ds \quad n \text{ par}$$

$$\frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} s (s-1) \cdots (s-n) ds \quad n \text{ impar}$$

$\xi \in (a, b)$

- Fórmulas abiertas usuales

$n=0$	$2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi)$	Regla del punto medio
$n=1$	$\frac{3h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi)$	
$n=2$	$\frac{4h}{3} [2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi)$	
$n=3$	$\frac{5h}{24} [11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\xi)$	

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad



Ejemplo

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad

n=0	$2hf(x_0) = 2\pi/4 [\cos(\pi/4)] = \pi/2 \cdot 1/\sqrt{2} \approx 1.1107$ $Error \leq \left \frac{h^3}{3} f''(\xi) \right = \frac{(\pi/4)^3}{3} = 0.1615$
n=1	$\frac{3h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] = \frac{3\pi/6}{2} [\cos(\pi/6) + \cos(\pi/3)] \approx 1.0729$ $Error \leq \left \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \right = \frac{3(\pi/6)^3}{4} = 0.1077$
n=2	$\frac{4h}{3} [2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] = \frac{4(\pi/8)}{3} [2\cos(\pi/8) - \cos(\pi/4) + 2\cos(3\pi/8)] \approx 0.9980$ $Error \leq \left \frac{3h^5}{80} f^{iv}(\xi) \right = \frac{3(\pi/8)^5}{80} = 0.0029$
n=3	$\frac{5h}{24} [11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] = \frac{5\pi/10}{24} \left[11\cos(\pi/10) + \cos(\pi/5) + \cos(3\pi/10) + 11\cos(2\pi/5) \right] \approx 0.9986$ $Error \leq \left \frac{95h^5}{144} f^{iv}(\xi) \right = \frac{95(\pi/10)^5}{144} = 0.0020$



Reglas Compuestas

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad

- Subdivisión en subintervalos y aplicación de la regla simple a cada subintervalo

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f(x) dx$$

- Reglas más habituales

– Regla del trapecio compuesta

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(\frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \right) = \\ &= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \end{aligned}$$

– Regla de Simpson compuesta

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{2(i-1)}}^{x_{2i}} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(\frac{h}{3} [f(x_{2(i-1)}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i) \right) = \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_n) \right) - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$



Ejemplo: trapezio compuesta $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$$

- Regla

- 2 intervalos (3 puntos)

$$\frac{\pi/4}{2} (f(0) + 2f(\pi/4) + f(\pi/2)) = \frac{\pi}{8} (1.0 + 2 \times 0.7071 + 0.0) = 0.9481$$

- 3 intervalos (4 puntos)

$$\frac{\pi/6}{2} (f(0) + 2[f(\pi/6) + f(\pi/3)] + f(\pi/2)) = \frac{\pi}{12} (1.0 + 2[0.8660 + 0.5000] + 0.0) = 0.9770$$

- 4 intervalos (5 puntos)

$$\frac{\pi/8}{2} \left(f(0) + 2 \sum_{i=1}^3 f(i\pi/8) + f(\pi/2) \right) = \frac{\pi}{16} (1.0 + 2 \times [0.9239 + 0.7071 + 0.3827] + 0.0) = 0.9871$$

- Cota y error real

$$M = \sup_{\xi \in (a,b)} |f''(\xi)| = \sup_{x \in (0, \pi/2)} |\cos(x)| = 1$$

- 2 intervalos $h = \frac{\pi}{4} \quad \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/4)^2}{12} M \right| = 0.0807 \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 0.9481| = 0.0519$

- 3 intervalos $h = \frac{\pi}{6} \quad \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/6)^2}{12} M \right| = 0.0359 \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 0.9770| = 0.0230$

- 4 intervalos $h = \frac{\pi}{8} \quad \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/8)^2}{12} M \right| = 0.0202 \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 0.9871| = 0.0129$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad



Ejemplo: simpson compuesta $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_n) \right) - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

- Regla

- 2 intervalos (5 puntos)

$$\frac{\pi/8}{2} \left(f(0) + 4 \left[f(\pi/8) + f(3\pi/8) \right] + 2 f(2\pi/8) + f(\pi/2) \right) = \frac{\pi}{16} (1 + 4[0.9239 + 0.3827] + 2 \times 0.7071 + 0) = 1.0001$$

- 3 intervalos (7 puntos)

$$\frac{\pi/12}{2} \left(f(0) + 4 \sum_{i=1}^3 f\left(\frac{(2i-1)\pi}{12}\right) + 2 \sum_{i=1}^2 f\left(\frac{2i\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\pi}{24} (1 + 4 \times 1.9319 + 2 \times 1.3660 + 0) = 1.0000263$$

- 4 intervalos (9 puntos)

$$\frac{\pi/16}{2} \left(f(0) + 4 \sum_{i=1}^4 f\left(\frac{(2i-1)\pi}{16}\right) + 2 \sum_{i=1}^3 f\left(\frac{2i\pi}{16}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\pi}{32} (1 + 4 \times 2.5629 + 2 \times 2.0137 + 0) = 1.0000083$$

- Cota y error real

$$M = \sup_{\xi \in (a,b)} \left| f^{(4)}(\xi) \right| = \sup_{x \in (0, \pi/2)} |\cos(x)| = 1$$

- 2 int. $h = \frac{\pi}{8} \quad \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/8)^4}{180} M \right| = 2.07 \times 10^{-4} \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 1.00013| = 1.3 \times 10^{-4}$

- 3 int. $h = \frac{\pi}{12} \quad \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/12)^4}{180} M \right| = 4.1 \times 10^{-5} \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 1.000026| = 2.6 \times 10^{-5}$

- 4 int. $h = \frac{\pi}{16} \quad \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/16)^4}{180} M \right| = 1.3 \times 10^{-5} \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 1.000008| = 8.3 \times 10^{-6}$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción

- Fórmulas Derivac.

- Extrapolación*

- Estab. Derivación

- Reglas NewtonCotes

- Cuadratura Gauss.*

- Otras integrales*

- Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad



Control de error y ejemplo

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad

- Las reglas compuestas permiten controlar el error variando el número de subintervalos (modifican el valor de h).
- Cotas de error
 - Trapecio $\left| \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 \right|$ con $M_2 = \sup_{\xi \in (a,b)} |f''(\xi)|$
 - Simpson $\left| \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 \right|$ con $M_4 = \sup_{\xi \in (a,b)} |f^{(iv)}(\xi)|$
- Ejemplo
 - Obtener el numero de subintervalos para poder asegurar que el cálculo de la integral indicada mediante las reglas compuestas tenga un error no superior a una millonésima
 - Trapecio

$$\frac{(\pi/2 - 0)h^2}{12} M_2 = \frac{\pi}{24} h^2 \leq 10^{-6} \rightarrow h \leq \sqrt{24/\pi} 10^{-6} = 0.0028 \rightarrow n \geq \frac{\pi/2}{h} \geq 568.31 = 569$$

- Simpson

$$\frac{(\pi/2 - 0)h^4}{180} M_4 = \frac{\pi}{360} h^4 \leq 10^{-6} \rightarrow h \leq \sqrt[4]{360/\pi} 10^{-6} = 0.1035 \rightarrow n \geq \frac{\pi/2}{2h} \geq 7.59 = 8$$



Estabilidad numérica

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Coef. Indeterminados

R. cerradas simples

R. abiertas simples

R. compuestas

Control del error

Estabilidad

- Las fórmulas de integración numérica habituales son estables en h
- Trapecio compuesta (con errores de representación)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(a) + \varepsilon_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (f(x_k) + \varepsilon_k) + (f(b) + \varepsilon_N) \right) - \frac{f''(\zeta)}{12} (b-a) h^2$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - RT_c(f, [a, b], h) \right| \leq \left| \frac{h}{2} \left(\varepsilon_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_k + \varepsilon_N \right) \right| + \left| \frac{f''(\zeta)}{12} (b-a) h^2 \right|$$

$$\leq \frac{h}{2} 2N\varepsilon + \frac{M}{12} (b-a) h^2 = (b-a) \varepsilon + \frac{M}{12} (b-a) h^2$$

- Simpson compuesta (con errores de representación)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(a) + \varepsilon_0 + 4 \sum_{k=1}^N (f(x_{2k-1}) + \varepsilon_k) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (f(x_{2k}) + \varepsilon_{2k}) + (f(b) + \varepsilon_N) \right) - \frac{f^{iv}(\zeta)}{180} (b-a) h^4$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - RS_c(f, [a, b], h) \right| \leq \left| \frac{h}{3} \left(\varepsilon_0 + 4 \sum_{k=1}^N \varepsilon_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{2k} + \varepsilon_N \right) \right| + \left| \frac{f^{iv}(\zeta)}{180} (b-a) h^4 \right|$$

$$\leq \frac{h}{3} 6N\varepsilon + \frac{M}{180} (b-a) h^4 = (b-a) \varepsilon + \frac{M}{180} (b-a) h^4$$

- Caso general (con errores de representación)

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^N \alpha_i h (f(x_i) + \varepsilon_k) + E_{trunc}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - RN(f, [a, b], h) \right| \leq \sum_{i=0}^N |\alpha_i| h \varepsilon_k + E_{trunc} \leq h \varepsilon \sum_{i=0}^N |\alpha_i| + E_{trunc}$$

En las reglas simples, se cumple generalmente que $\alpha_i > 0$ y $\sum \alpha_i = 1$



Cuadratura gaussiana

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Polinomios ortogonales

Cambio de intervalo

- No fija los puntos. Valores óptimos para obtener mayor grado

– Ejemplo

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^1 \alpha_i f(x_i) \xrightarrow[\text{indeter}]{\text{coef.}} \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = 1 & 2 = \alpha_0 + \alpha_1 \\ f(x) = x & 0 = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \\ f(x) = x^2 & \frac{2}{3} = \alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 \\ f(x) = x^3 & 0 = \alpha_0 x_0^3 + \alpha_1 x_1^3 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{4^a}{2^a} &\Rightarrow x_0^2 = x_1^2 \rightarrow x_0 = \pm x_1 \\ 3^a &\rightarrow \frac{2}{3} = (\alpha_0 + \alpha_1) x_0^2 = 2x_0^2 \Rightarrow x_0 = \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 1 \\ x_0 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right. \\ 2^a &\Rightarrow x_0 \neq x_1 \rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = 1 \cdot f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + O\left(f^{(4)}(x)\right)$$

- Polinomios ortogonales

– Base de polinomios

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots\} / \text{grado}(\varphi_n(x)) = n$$

– Definidos en un intervalo [a,b]

– Ortogonales para una determinada función w(x), denominada peso

$$\text{Sea } w(x) \in C[a,b] / w(x) \geq 0 : \int_a^b w(x) \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ > 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$



Propiedades

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Polinomios ortogonales

Cambio de intervalo

● Relación de recurrencia

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = x - B_1$$

$$\varphi_k(x) = (x - B_k)\varphi_{k-1}(x) - C_k\varphi_{k-2}(x)$$

$$B_1 = \frac{\int_a^b xw(x)[\varphi_0(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x)[\varphi_0(x)]^2 dx}$$

$$B_k = \frac{\int_a^b xw(x)[\varphi_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x)[\varphi_{k-1}(x)]^2 dx}$$

$$C_k = \frac{\int_a^b xw(x)\varphi_{k-1}(x)\varphi_{k-2}(x)dx}{\int_a^b w(x)[\varphi_{k-2}(x)]^2 dx}$$

● Orden de las fórmulas y error

Dado el polinomio ortogonal $\varphi_n(x)$ con raíces $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, se tiene

$$P_{2n-1}(x) = \varphi_n(x)P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) \rightarrow P_{2n-1}(\xi_k) = \varphi_n(\xi_k)P_{n-1}(\xi_k) + R_{n-1}(\xi_k) = R_{n-1}(\xi_k)$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x)P_{2n-1}(x)dx &= \int_a^b w(x)\varphi_n(x)P_{n-1}(x)dx + \int_a^b w(x)R_{n-1}(x)dx = \\ &= \int_a^b w(x)R_{n-1}(x)dx = \sum_{k=1}^n P_{2n-1}(\xi_k) \int_a^b w(x)L_{n-1}^k(x)dx = \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k P_{2n-1}(\xi_k) \end{aligned}$$

Y por tanto el error viene dado por

$$\int_a^b w(x)f(x)dx - \int_a^b w(x)R_{n-1}(x)dx = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) \left(\prod_{i=0}^n (x - \xi_i) \right)^2 dx$$



Familias de polinomios ortogonales

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Fórmulas Derivac.
 - Extrapolación*
 - Estab. Derivación
 - Reglas NewtonCotes
 - Cuadratura Gauss.*
 - Otras integrales*
 - Resumen General
- Bibliografía
- Software

Nombre	[a,b]	w(x)	Notas
<u>Legendre</u>	[-1,1]	1	Se impone que su valor en $x=1$ sea 1 Asociados a la ecuación diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
<u>Tchebishev</u>	[-1,1]	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Uso en interpolación (aproximación minimax) Asociados a la ecuación diferencial $(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$
<u>Hermite</u>	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	Asociados a la ecuación diferencial $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$
<u>Laguerre</u>	$[0, \infty)$	e^{-x}	Asociados a la ecuación diferencial $xy'' - (1-x)y' + \alpha y = 0$

Jacobi, Gegenbauer, Appell, Charlier, Jack, Krawtchouk, ...

Introducción

Polinomios ortogonales

Cambio de intervalo



Polinomios de Legendre

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Polinomios ortogonales

Cambio de intervalo

● Polinomios

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$L_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

● Norma

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

● Relación de recurrencia

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}((2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x))$$

● Raíces y coeficientes

N	Raíces	Coeff.
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
3	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}, 0$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18-\sqrt{30})$ $\frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{1}{900}(322+13\sqrt{70})$ $\frac{1}{900}(322-13\sqrt{70})$



Polinomios de Tchebishev

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Fórmulas Derivac.
- Extrapolación*
- Estab. Derivación
- Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

- Otras integrales*
- Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Polinomios ortogonales

Cambio de intervalo

● Polinomios

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

● Norma

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi & n = 0 \\ \pi/2 & n \neq 0 \end{cases}$$

● Relación de recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \theta = \arccos(x)$$

● Raíces y coeficientes

$$\text{raíces} \quad \cos\left(\frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{extremos} \quad \cos\left(\frac{2k}{n} \frac{\pi}{2}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

N	Raíces	Coeff.
2	$\pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \pi$
3	$\pm \frac{1}{2} \sqrt{3}$	$\frac{1}{3} \pi$
4	$\pm \frac{1}{2} \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$	$\frac{1}{4} \pi$
5	0 $\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (5 \pm \sqrt{5})}$	$\frac{1}{5} \pi$



Polinomios de Hermite

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Polinomios ortogonales

Cambio de intervalo

● Polinomios

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

● Norma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

● Relación de recurrencia

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

● Raíces y coeficientes

N	Raíces	Coeff.
2	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
3	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{6}, 0$	$\frac{1}{6}\sqrt{\pi}, \frac{2}{3}\sqrt{\pi}$
4	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}(3 - \sqrt{6})}$ $\pm \sqrt{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{6})}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\pi}(3 - \sqrt{6})^{-1}$ $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}(3 + \sqrt{6})^{-1}$
5	0 ± 0.958572 ± 2.02018	0.945309 0.393619 0.0199532



Polinomios de Laguerre

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Polinomios ortogonales

Cambio de intervalo

● Polinomios

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = -x + 1$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$$

$$L_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$L_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

● Norma

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_n(x) dx = 1$$

● Relación de recurrencia

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

N	Raíces	Coeff.
2	$2 - \sqrt{2}$	$\frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$
	$2 + \sqrt{2}$	$\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$
3	0.415775	0.711093
	2.29428	0.278518
	6.28995	0.0103893
4	0.322548	0.603154
	1.74576	0.357419
	4.53662	0.0388879
	9.39507	0.000539295
5	0.26356	0.521756
	1.4134	0.398667
	3.59643	0.0759424
	7.08581	0.00361176
	12.6408	0.00002337



Integral en un intervalo cualquiera

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Introducción

Polinomios ortogonales

Cambio de intervalo

● Cambio de variable

$$\int_a^b F(y) dy = \left\{ \begin{array}{l} y = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b - a} (x - a) \\ dy = \frac{\beta - \alpha}{b - a} dx \end{array} \right\} = \int_a^b F(y(x)) \frac{\beta - \alpha}{b - a} dx = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \int_a^b w(x) f(x) dx$$

● Ejemplos

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_k f(\xi_k) + \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \int_a^b w(x) \left(\prod_{k=0}^n (x - \xi_k) \right)^2 dx$$

$$1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\pi}{4} (x + 1) \\ dy = \frac{\pi}{4} dx \end{array} \right\} = \frac{\pi}{4} \int_a^b \cos\left(\frac{\pi}{4} (x + 1)\right) dx \approx \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \alpha_k f(\xi_k)$$

$$n = 2 \quad \frac{\pi}{4} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} + 1\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)\right) \right\} = 0.998472613404115$$

$$n = 3 \quad \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{5}{9} \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(-\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right)\right) + \frac{8}{9} \cos\left(\frac{\pi}{4} (0 + 1)\right) + \frac{5}{9} \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right)\right) \right\} = 1.000008121555498$$

$$n = 4 \quad \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{1}{36} (18 - \sqrt{30}) \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{-1}{35} \sqrt{525 + 70\sqrt{30}} + 1\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{35} \sqrt{525 + 70\sqrt{30}} + 1\right)\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{36} (18 + \sqrt{30}) \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{-1}{35} \sqrt{525 - 70\sqrt{30}} + 1\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{35} \sqrt{525 - 70\sqrt{30}} + 1\right)\right) \right] \right\} = 0.99999977197115$$

$$n = 5 \quad \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{1}{900} (322 + 13\sqrt{70}) \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{-1}{21} \sqrt{245 - 14\sqrt{70}} + 1\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{21} \sqrt{245 - 14\sqrt{70}} + 1\right)\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{128}{225} \cos\left(\frac{\pi}{4} (0 + 1)\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{900} (322 - 13\sqrt{70}) \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{-1}{21} \sqrt{245 + 14\sqrt{70}} + 1\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{21} \sqrt{245 + 14\sqrt{70}} + 1\right)\right) \right] \right\} = 1.0000000000039$$



Integración de Romberg: Proceso

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Integ. Romberg

Integ. Adaptativa

Integ. impropia

Integ. múltiple

- Utiliza la regla del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) + k_1 h^2 + k_2 h^4 + k_3 h^6 + \dots$$

- Se combina con la extrap. de Richardson

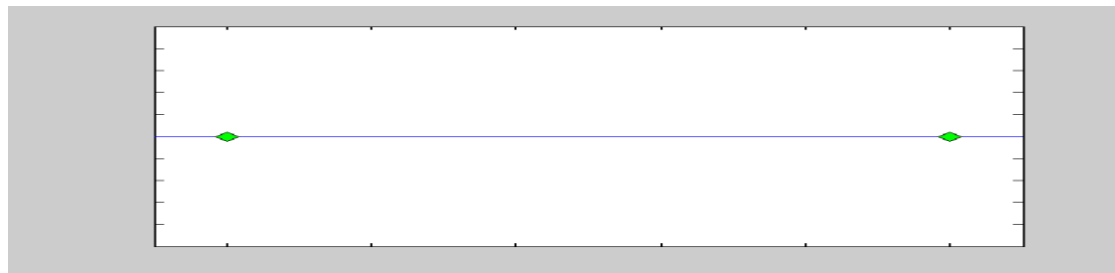
$$N_k(h) = \frac{4^k N_{k-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{k-1}(h)}{4^k - 1} = N_{k-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{k-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{k-1}(h)}{4^k - 1}$$

- Aprovecha las relaciones de la regla

$$N_o(h_0 = b - a) = \frac{h}{2} (f(a) + f(b))$$

$$N_o\left(h_1 = \frac{h}{2}\right) = \frac{h_1}{2} \left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = \frac{1}{2} N_o(h_0) + h_1 f\left(a + h_1\right)$$

$$\begin{aligned} N_o\left(h_2 = \frac{h}{2^2}\right) &= \frac{h_2}{2} \left(f(a) + 2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right) = \\ &= \frac{1}{2} N_o(h_1) + h_2 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2)) \end{aligned}$$





Integración de Romberg: Relaciones

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Integ. Romberg

Integ. Adaptativa

Integ. impropia

Integ. múltiple

$$N_o(h_0 = b - a) = \frac{h}{2} (f(a) + f(b))$$

$$N_o(h_1 = \frac{h}{2^1}) = \frac{1}{2} N_o(h_0) + h_1 f(a + h_1)$$

$$N_o(h_2 = \frac{h}{2^2}) = \frac{1}{2} N_o(h_1) + h_2 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2))$$

$$N_o(h_3 = \frac{h}{2^3}) = \frac{1}{2} N_o(h_2) + h_3 \left(\begin{aligned} &f(a + h_3) + f(a + 3h_3) + \\ &+ f(a + 5h_3) + f(a + 7h_3) \end{aligned} \right)$$

$$N_o(h_4 = \frac{h}{2^4}) = \frac{1}{2} N_o(h_3) + h_4 \left(\begin{aligned} &f(a + h_4) + f(a + 3h_4) + \\ &+ f(a + 5h_4) + f(a + 7h_4) + \\ &+ f(a + 9h_4) + f(a + 11h_4) + \\ &+ f(a + 13h_4) + f(a + 15h_4) \end{aligned} \right)$$

⋮

$$N_o(h_k = \frac{h}{2^k}) = \frac{1}{2} N_o(h_{k-1}) + h_k \sum_{i=1}^{2^{k-1}} f(a + (2i-1)h_k)$$



Ejemplo

Calcular, con un error inferior a 10^{-6} , aplicando el método de integración de Romberg

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$$

Aplicamos la fórmula de Romberg, donde $h=(b-a)/n$, para utilizar a continuación la extrapolación de Richardson

$$N_1(h) = \frac{4^1 N_0\left(\frac{h}{2}\right) - N_0(h)}{4^1 - 1} = \frac{4 \times 0.9480594 - 0.7853982}{3} = 1.0022799$$

$$N_2(h) = \frac{4^2 N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)}{4^2 - 1} = \frac{16 \times 1.0001346 - 1.0022799}{15} = 0.9999916$$

$$N_3(h) = \frac{4^3 N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)}{4^3 - 1} = \frac{64 \times 0.9999999 - 0.9999916}{63} = 1.0000000$$

n	h	$N_0(h)$	$N_1(h)$	$N_2(h)$	$N_3(h)$	$N_4(h)$
1	$\pi/2$	0.7853982				
2	$\pi/4$	0.9480594	1.0022799			
4	$\pi/8$	0.9871158	1.0001346	0.9999916		
8	$\pi/16$	0.9967852	1.0000083	0.9999999	1.0000000	
16	$\pi/32$	0.9991967	1.0000005	1.0000000	1.0000000	1.0000000

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Fórmulas Derivac.
 - Extrapolación*
 - Estab. Derivación
 - Reglas NewtonCotes
 - Cuadratura Gauss.*
 - Otras integrales*
 - Resumen General
- Bibliografía
- Software

Integ. Romberg
 Integ. Adaptativa
 Integ. impropia
 Integ. múltiple



Motivación

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Integ. Romberg

Integ. Adaptativa

Integ. impropia

Integ. múltiple

- Basada en la fórmula de Simpson compuesta
- Supone comportamiento “suave” de $f^{(4)}(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = S(a, b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) \quad \text{con } h = \frac{b-a}{2} \text{ y } S(a, b) = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tilde{\eta})$$

Igualando y tomando $f^{(4)}(\tilde{\eta}) \approx f^{(4)}(\eta)$

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tilde{\eta}) = S(a, b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)$$

$$-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) \approx \frac{16}{15} \left[S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - S(a, b) \right]$$

Estimación del error

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| \approx \frac{1}{15} \left| S(a, b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|$$



Proceso

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Fórmulas Derivac.
- Extrapolación*
- Estab. Derivación
- Reglas NewtonCotes
- Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

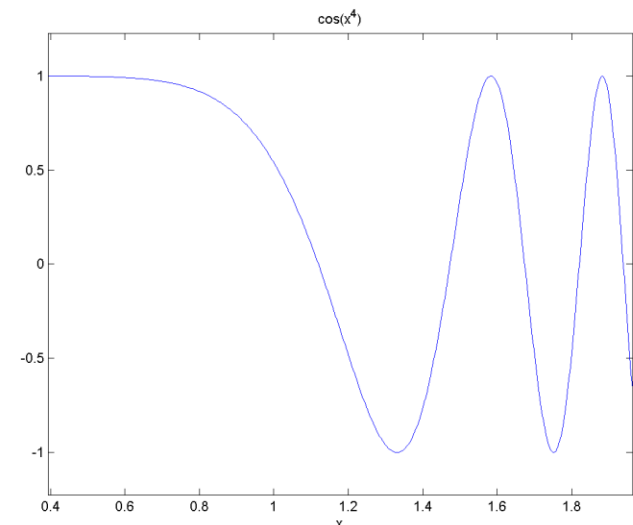
Integ. Romberg
Integ. Adaptativa
Integ. impropia
Integ. múltiple

1. Calcular $I = S(a,b)$, $I_i = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $I_d = S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, $I_s = I_a + I_d$
2. Estimar el error como $e = |I - I_s|$
3. Si $e < 15\epsilon$ tomar I_s como valor de la integral sino repetir el proceso con cada semi-intervalo, dividiendo también por dos el error admisible

- Ejemplo: Calcular, con un error inferior a 1 centésima

$$\int_{\pi/8}^{5\pi/8} \cos(x^4) dx = 0.470355208182252\dots$$

- Representación de la función





Ejemplo: resultados

$$\begin{aligned}
 I &= S(a, b) = \frac{5/8 - 1/8}{6} \left(\cos(1/8)^4 + 4 \cos(3/8)^4 + \cos(5/8)^4 \right) \approx -0.2766 \\
 I_i &= S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{3/8 - 1/8}{6} \left(\cos(1/8)^4 + 4 \cos(2/8)^4 + \cos(3/8)^4 \right) \approx 0.5715 \\
 I_d &= S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) = \frac{5/8 - 3/8}{6} \left(\cos(3/8)^4 + 4 \cos(4/8)^4 + \cos(5/8)^4 \right) \approx 0.3812
 \end{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 I_s &= I_a + I_d \\
 &\approx 0.9526
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 |I_s - I| &\approx 1.2292 \\
 &> 15\varepsilon
 \end{aligned}$$

$[a, b]$	I	I_i	I_d	I_s	$ I - I_s $	tol
(4,20) $\pi/32$	-0.2766	0.5715	0.3812	0.9526	1.2292	0.0100
(4,12) $\pi/32$	0.5715	0.3861	0.1947	0.5808	0.0094	0.0050
(12,20) $\pi/32$	0.3812	-0.1969	-0.2272	-0.4240	0.8052	0.0050
(12,16) $\pi/32$	-0.1969	-0.1568	0.0011	-0.1557	0.0412	0.0025
(12,14) $\pi/32$	-0.1568	-0.0622	-0.0947	-0.1569	0.0001	0.0013
(14,16) $\pi/32$	0.0011	-0.0523	0.0555	0.0032	0.0021	0.0013
(16,20) $\pi/32$	-0.2272	0.0136	0.0646	0.0781	0.3053	0.0025
(16,18) $\pi/32$	0.0136	0.0715	-0.0635	0.0081	0.0055	0.0013
(18,20) $\pi/32$	0.0646	-0.0083	0.0462	0.0379	0.0266	0.0013
(18,19) $\pi/32$	-0.0083	-0.0295	0.0217	-0.0078	0.0005	0.0006
(19,20) $\pi/32$	0.0462	0.0448	-0.0000	0.0447	0.0015	0.0006
				0.4721		

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Fórmulas Derivac.
 - Extrapolación*
 - Estab. Derivación
 - Reglas NewtonCotes
 - Cuadratura Gauss.*
 - Otras integrales*
 - Resumen General
- Bibliografía
- Software

Integ. Romberg
 Integ. Adaptativa
 Integ. impropia
 Integ. múltiple



Ejemplo: representación gráfica

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Fórmulas Derivac.
- Extrapolación*
- Estab. Derivación
- Reglas NewtonCotes
- Cuadratura Gauss.*

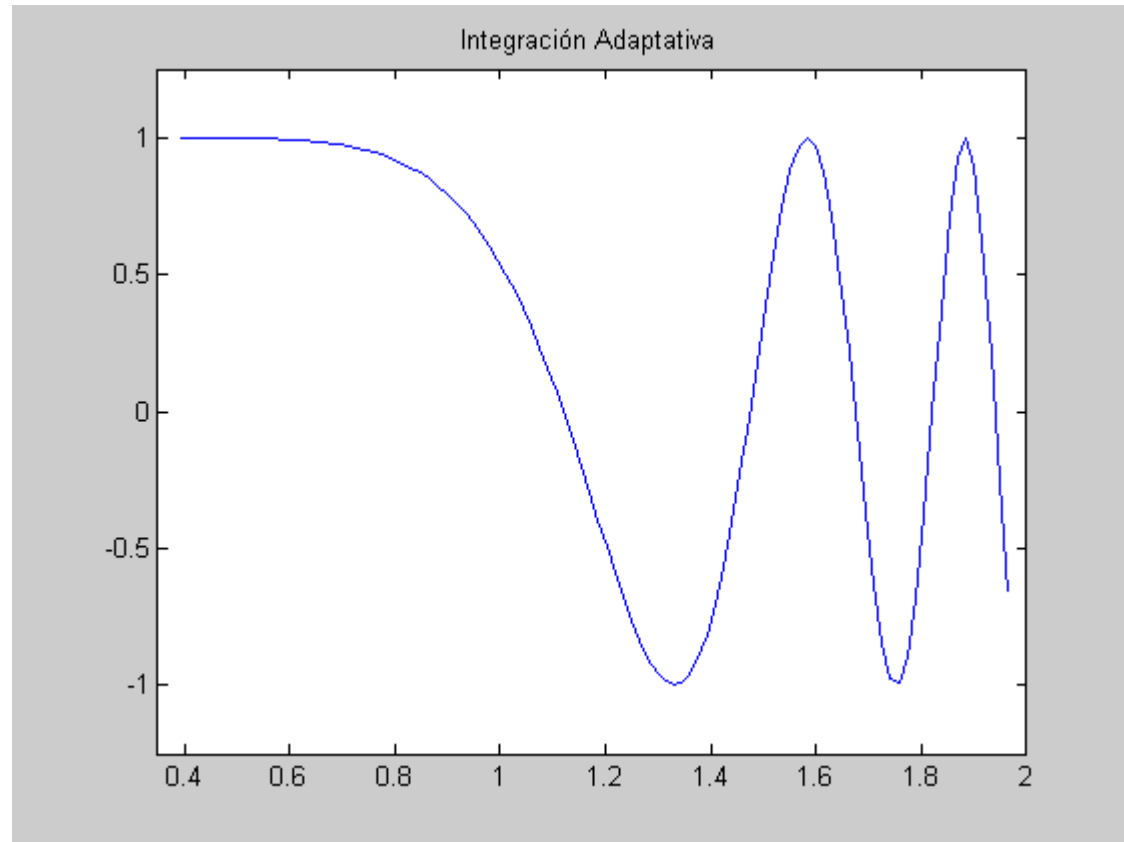
➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Integ. Romberg
Integ. Adaptativa
Integ. impropia
Integ. múltiple



Integral: $0.5808 + (-0.1569) + 0.0032 + 0.0081 + (-0.0078) + 0.0447 = 0.4721$



Integración impropia (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Integ. Romberg
Integ. Adaptativa
Integ. impropia
Integ. múltiple

- Hay dos formas diferentes de abordar la integración impropia

- Usando los polinomios ortogonales adecuados (Hermite o Laguerre)

$$\int_0^{\infty} g(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{g(x)}{e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

- Utilizando un cambio de variable antes de resolver el límite impropio con una fórmula abierta

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right\} = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f(t) \frac{1}{t^2} dt$$

- Nota: Se debe verificar $ab > 0$ (el dominio no incluye el valor nulo), sino es necesario realizar previamente una división del dominio

$$\int_{-a}^{\infty} f(x) dx = \int_{-a}^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx$$

- Donde el valor b se elige lo suficientemente grande como para que el comportamiento asintótico de la función sea $O(x^{-2})$



Integración impropia (II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Integ. Romberg

Integ. Adaptativa

Integ. impropia

Integ. múltiple

● Calcular $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\pi/2} \approx 1.253314137315500$

– Usando los polinomios de Laguerre (simples)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-x^2/2+x} dx \approx \begin{cases} 1.304677973964021 & (n=2) \\ 1.187176785267228 & (n=3) \\ 1.236879870719581 & (n=4) \\ 1.263673857958196 & (n=5) \end{cases}$$

– Descomponiendo la integral en dos, utilizando la regla del trapecio para la primera y la del punto medio para la segunda

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_0^2 e^{-x^2/2} dx + \int_2^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_0^2 e^{-x^2/2} dx + \int_0^{1/2} e^{-1/2t^2} \frac{1}{t^2} dt =$$

$$= \begin{cases} 1.1741983013 + 0.0507831125 = 1.22498141383 & (2 \text{ intervalos}) \\ 1.1906738356 + 0.0555665510 = 1.24624038672 & (4 \text{ intervalos}) \\ 1.1948797590 + 0.0566733473 = 1.25155310642 & (8 \text{ intervalos}) \\ 1.1959356697 + 0.0569379755 = 1.25287364536 & (16 \text{ intervalos}) \end{cases}$$



Integración múltiple (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Integ. Romberg
Integ. Adaptativa
Integ. impropia
Integ. múltiple

- Las integrales múltiples sobre recintos hipercúbicos se resuelven aplicando de forma reiterada las fórmulas simples o utilizando métodos estadísticos (Montecarlo)

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

– Ejemplo (utilizando Simpson)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_0^2 (x-y)^2 dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 (x-y)^2 dx \right) dy = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{2-0}{6} \left[(0-y)^2 + 4(1-y)^2 + (2-y)^2 \right] \right) dy = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (6y^2 - 12y + 8) dy = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1-(-1)}{6} \left[(6(-1)^2 - 12(-1) + 8) + 4(6 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 8) + (6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 8) \right] \right) = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

- Cuando el recinto no es hipercúbico la única solución es acudir a métodos estadísticos (Montecarlo)

$$\int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy$$



Integración múltiple por Simpson

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Fórmulas Derivac.
- Extrapolación*
- Estab. Derivación
- Reglas NewtonCotes
- Cuadratura Gauss.*
- Otras integrales*
- Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Integ. Romberg
Integ. Adaptativa
Integ. impropia
Integ. múltiple

$$\begin{aligned}
 \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy &= \frac{h_x}{3} \int_c^d \left(f(x_0, y) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y) + f(x_{2n}, y) \right) dy = \\
 &= \frac{h_x}{3} \frac{h_y}{3} \left(\begin{aligned} &f(x_0, y_0) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_0, y_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_0, y_{2j}) + f(x_0, y_{2m}) + \\ &4 \sum_{i=1}^n \left[f(x_{2i-1}, y_0) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i-1}, y_{2j}) + f(x_{2i-1}, y_{2m}) \right] + \\ &2 \sum_{i=1}^{n-1} \left[f(x_{2i}, y_0) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2i}, y_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + f(x_{2i}, y_{2m}) \right] + \\ &f(x_{2n}, y_0) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2n}, y_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2n}, y_{2j}) + f(x_{2n}, y_{2m}) + \\ &2 \left[\sum_{j=1}^{m-1} (f(x_0, y_{2j}) + f(x_{2n}, y_{2j})) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{2i}, y_0) + f(x_{2i}, y_{2m})) \right] + \\ &4 \left[\sum_{j=1}^m (f(x_0, y_{2j-1}) + f(x_{2n}, y_{2j-1})) + \sum_{i=1}^n (f(x_{2i-1}, y_0) + f(x_{2i-1}, y_{2m})) \right] + \\ &4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + 8 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m f(x_{2i}, y_{2j-1}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i-1}, y_{2j}) \right] + 16 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) \end{aligned} \right) =
 \end{aligned}$$



Integración múltiple (III)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Fórmulas Derivac.
- Extrapolación*
- Estab. Derivación
- Reglas NewtonCotes
- Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

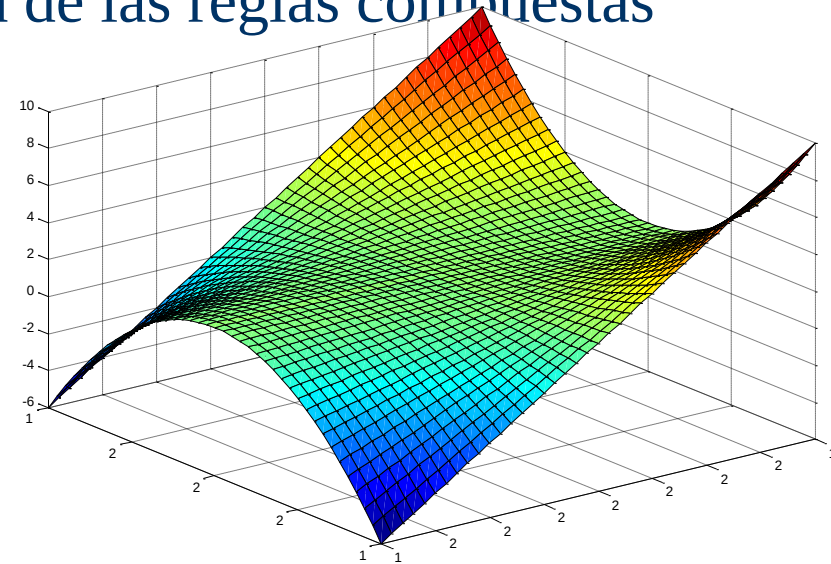
Integ. Romberg
Integ. Adaptativa
Integ. impropia
Integ. múltiple

● Interpretación gráfica de las reglas compuestas

– Trapecio

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy =$$

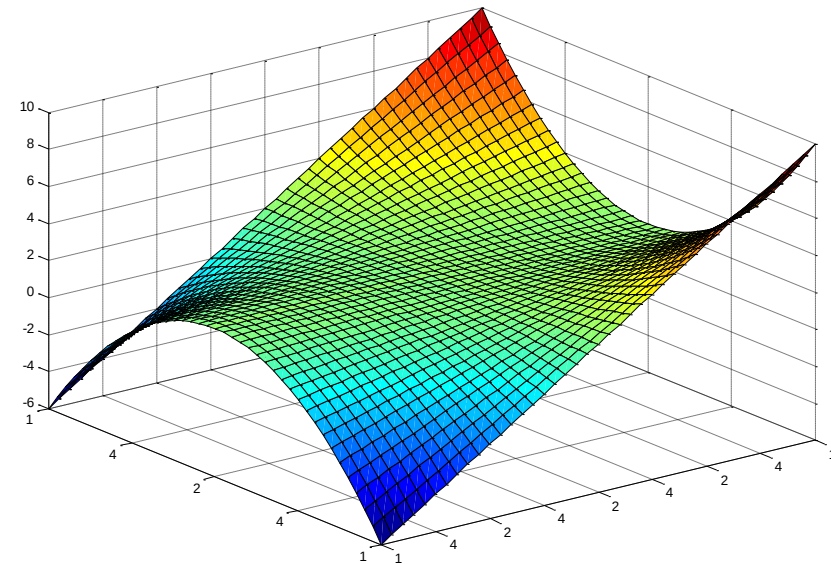
$$\frac{h_x}{2} \frac{h_y}{2} \left(\left[\sum_x (1, 1) \right] \times \left[\sum_y (1, 1) \right] \right) =$$



– Simpson

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy =$$

$$\frac{h_x}{3} \frac{h_y}{3} \left(\left[\sum_x (1, 4, 1) \right] \times \left[\sum_y (1, 4, 1) \right] \right) =$$





Método de Montecarlo (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Integ. Romberg
Integ. Adaptativa
Integ. impropia
Integ. múltiple

- Calcula

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad V = \{\mathbf{x}; a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

- Proceso: genera una muestra aleatoria uniforme de valores $\mathbf{x}_i$ y aproxima la integral mediante

$$I \approx \frac{V}{N} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i) = I(\bar{f}) \quad \text{con } \bar{f} \text{ valor medio muestral de la integral}$$

$$\text{var}(f) = \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (f(\mathbf{x}_i) - \bar{f})^2$$

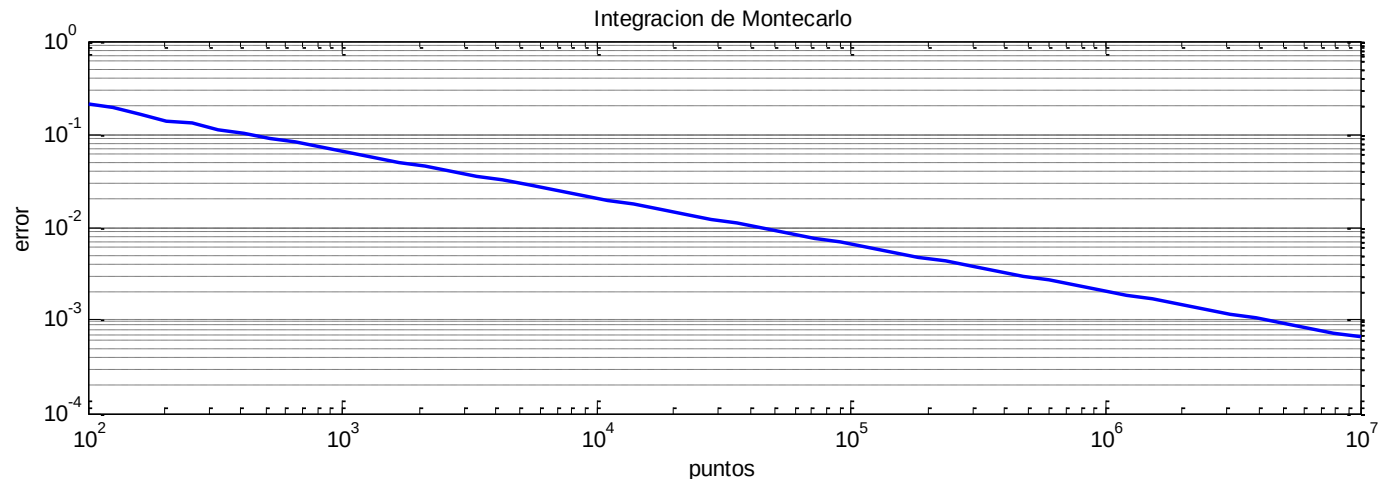
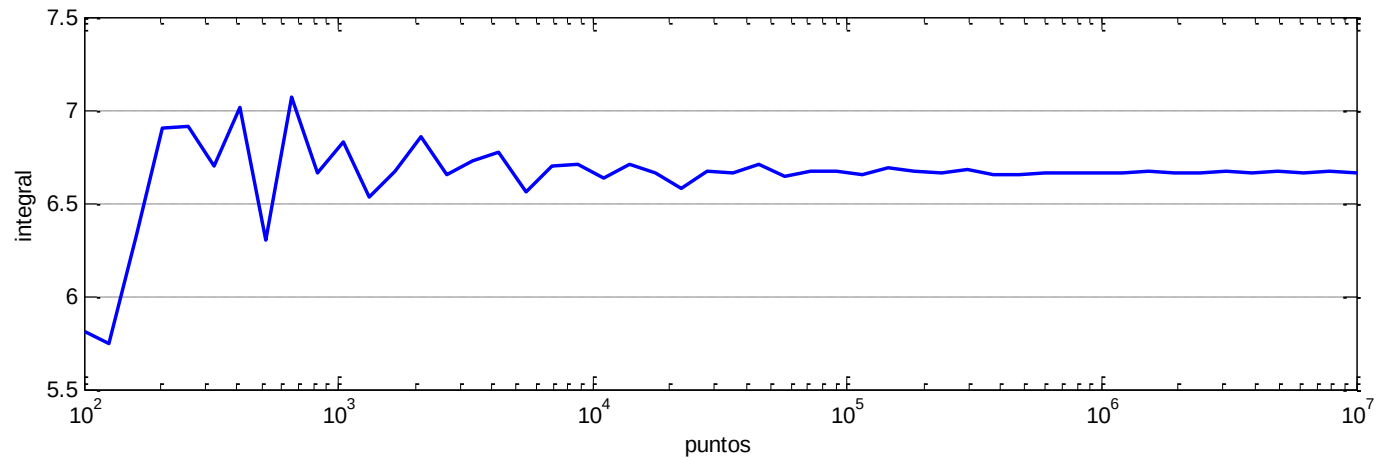
$$E(I(\bar{f})) = \int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{var}(I(\bar{f})) = \frac{V^2 \sigma^2}{N}$$

- Nota 1: El error de la integral es proporcional a su varianza y por tanto disminuye con $O(\sqrt{N})$ (Reducirla a la mitad exige cuadruplicar el número de muestras)
- Nota 2: La convergencia depende del número de muestras, pero NO de la dimensión del volumen



Método de Montecarlo (II)

- Calcular $\int_{-1}^1 \int_0^2 (x-y)^2 dx dy$



- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Fórmulas Derivac.
 - Extrapolación*
 - Estab. Derivación
 - Reglas NewtonCotes
 - Cuadratura Gauss.*
 - Otras integrales*
 - Resumen General
- Bibliografía
- Software

Integ. Romberg
Integ. Adaptativa
Integ. impropia
Integ. múltiple



Método de Montecarlo (III)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

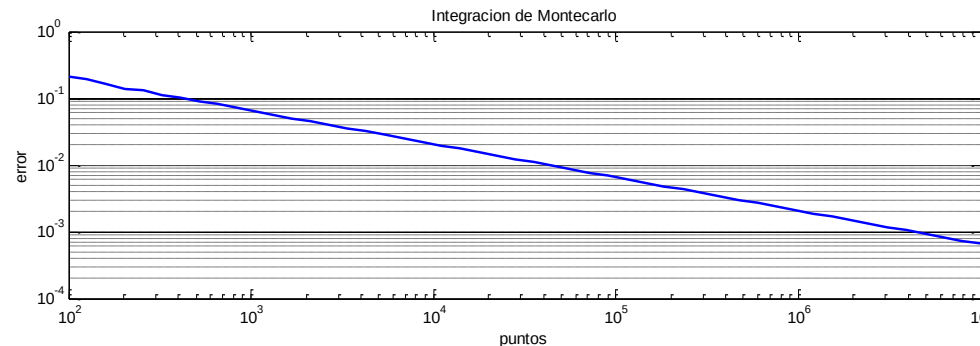
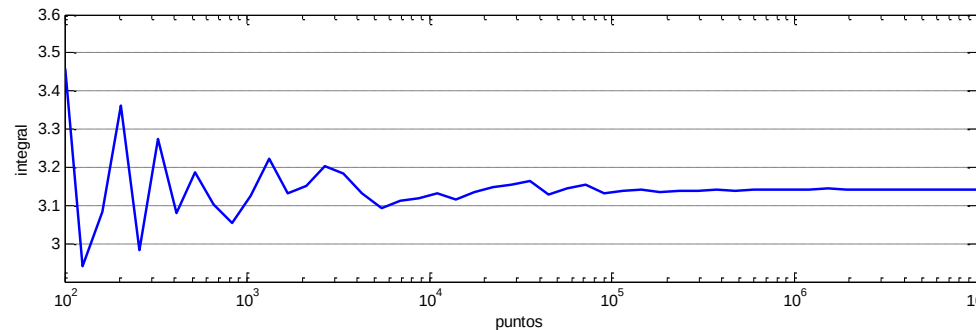
➤ Bibliografía

➤ Software

Integ. Romberg
Integ. Adaptativa
Integ. impropia
Integ. múltiple

- El volumen del elipsoide $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$
- Viene dado por $\frac{4}{3}\pi abc$
- Calcular el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$ para $x, y, z > 0$

$$\int_V 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2}} dx = 3 \int_0^1 \left(\int_0^{2\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2}} dx \right) dy \approx 3.142183001731533$$





Resumen

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software

Hay tres formas diferentes de obtener fórmulas numéricas para derivación / integración

- Interpolación / Newton Cotes
- Coeficientes indeterminados
- Desarrollo de Taylor / cuadratura gaussiana (derivación/integración)

Derivación:

- La interpolación calcula la expresión del error, pero sólo para las primeras derivadas
- Los desarrollos de Taylor permiten obtener la parte principal del error
- El método de coeficientes indeterminados sólo indica el orden de la fórmula.

Integración

- Las fórmulas de Newton-Cotes compuestas permiten ajustar el error deseado
- Las fórmulas de cuadratura se obtienen utilizando polinomios ortogonales definidos en intervalos determinados y para funciones de peso, y permiten fórmulas de mayor orden con un número menor de evaluaciones de la función
- La integración de Romberg se obtiene al combinar la regla del trapecio y la extrapolación de Richardson, y permite estimar numéricamente el error
- La integración adaptativa permite ajustar el error y variar el tamaño del paso
- Las integrales impropias requieren usar polinomios ortogonales o combinar cambios de variables con reglas de Newton-Cotes abiertas
- La integración en más de una dimensión se realiza combinando fórmulas de una dimensión cuando el dominio es hipercúbico o utilizando el método de Montecarlo en caso contrario



Bibliografía comentada

- **Motivación**
- **Objetivos**
- **Temario**
 - Introducción
 - Fórmulas Derivac.
 - Extrapolación*
 - Estab. Derivación
 - Reglas NewtonCotes
 - Cuadratura Gauss.*
 - Otras integrales*
 - Resumen General
- **Bibliografía**
- **Software**



Instrucciones

Válidas en Matlab (M), Octave (O) o ambos (B)

M	cumtrapz	Cumulative trapezoidal numerical integration
M	del2	Discrete Laplacian
M	diff	Differences and approximate derivatives
M	gradient	Numerical gradient
B	polyder	Polynomial derivative
B	polyint	Integrate polynomial analytically
O	polyreduce	Reduces a polynomial coefficient vector to a minimum number of terms by stripping off any leading zeros
B	dblquad	Numerically evaluate double integral over rectangle
O	colloc	Compute derivative and integral weight matrices for orthogonal collocation
B	quad	Numerically evaluate integral, adaptive Simpson quadrature
B	quad2d	Numerically evaluate double integral over planar region
B	quadgk	Numerically evaluate integral, adaptive Gauss-Kronrod quadrature
B	quadl	Numerically evaluate integral, adaptive Lobatto quadrature
B	quadv	Vectorized quadrature
B	trapz	Numerical integration using the trapezoidal method
B	triplequad	Numerically evaluate triple integral

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Fórmulas Derivac.

➤ Extrapolación*

➤ Estab. Derivación

➤ Reglas NewtonCotes

➤ Cuadratura Gauss.*

➤ Otras integrales*

➤ Resumen General

➤ Bibliografía

➤ Software



Anexos

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Fórmulas Derivac.
 - Extrapolación*
 - Estab. Derivación
 - Reglas NewtonCotes
 - Cuadratura Gauss.*
 - Otras integrales*
 - Resumen General
- Bibliografía
- Software

- Demostraciones y desarrollos



Runge Kutta de Orden 2

[Volver](#)

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Fórmulas Derivac.
 - Extrapolación*
 - Estab. Derivación
 - Reglas NewtonCotes
 - Cuadratura Gauss.*
 - Otras integrales*
 - Resumen General
- Bibliografía
- Software