

Índice

5. Derivación e integración numérica	1
5.1. Derivación numérica	1
5.2. Integración numérica	5
5.3. Fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes simples	6
5.3.1. Fórmula de los trapecios	7
5.3.2. Fórmula de Simpson	9
5.3.3. Regla del punto medio	10
5.4. Fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes compuestas	12
5.4.1. Trapecios compuesta	12
5.4.2. Simpson compuesta	14
5.5. Otras fórmulas de cuadratura	15
5.6. Ejercicios	16
5.6.1. Figuras	18

5. Derivación e integración numérica

5.1. Derivación numérica

La derivación numérica se utiliza para aproximar las derivadas de una función usando valores de la función en una serie de puntos. Se utiliza en los algoritmos que resuelven ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones y sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.

Se define la derivada de una función $f(x)$ en el punto x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

De esta fórmula obtenemos una aproximación de $f'(x)$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si tomamos $h > 0$, haciendo $\Delta x = h$ tendremos una fórmula progresiva:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Y con $\Delta x = -h$, tendremos una fórmula regresiva:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - h)}{h}$$

Se puede definir una fórmula centrada:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

Geométricamente, equivale a sustituir la recta tangente en un punto por una secante y en lugar de tomar la pendiente (derivada) de la recta tangente tomamos la de la secante. Los puntos en los que la secante corta la curva son aquellos que evaluamos para el cálculo de la derivada aproximada.

Ejemplo 5.1 Si $f(x) = e^x$, $x = 0$ con $h = 1$ la derivada aproximada usando la fórmula centrada es:

$$f'(0) \approx \frac{f(0 + 1) - f(0 - 1)}{2} = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \frac{2.7183 - 0.3679}{2} = 1.1752$$

Como $f'(x) = e^x$, el valor exacto es:

$$f'(0) = e^0 = 1$$

Mientras que usando la fórmula progresiva:

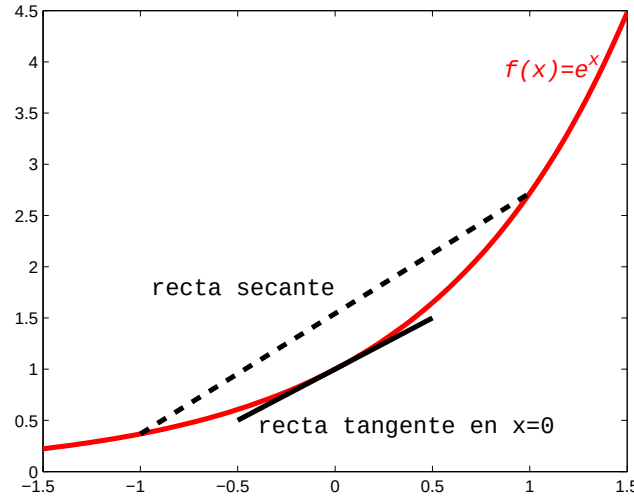


Figura 1: $f'(0)$ para $f(x) = e^x$, $x = 0$, $h = 1$ usando la fórmula centrada.

$$f'(0) \approx \frac{f(0+1) - f(0)}{1} = e^1 - e^0 = 2.7183 - 1 = 1.7183$$

Y usando la fórmula regresiva:

$$f'(0) \approx \frac{f(0) - f(0-1)}{1} = e^0 - e^{-1} = 1 - 0.3679 = 0.6321$$

Vemos que el error es mucho menor usando la fórmula centrada.

Si queremos analizar el error de cada una de las fórmulas anteriores, para la progresiva y la regresiva podemos seguir el razonamiento siguiente: supongamos que $f(x)$ es derivable dos veces en un entorno del punto x y aplicamos la fórmula de Taylor a $f(x + \Delta x)$ en x :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(c)}{2}\Delta x^2 \quad c \in (x, x + \Delta x) \quad \text{o} \quad c \in (x + \Delta x, x)$$

Operando:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \frac{f''(c)}{2}\Delta x$$

El error de las fórmulas tanto progresiva como regresiva, viene dado por:

$$E = f'(x) - \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{f''(c)}{2}\Delta x$$

Si M_2 es una cota superior de $|f''(c)|$ se verifica:

$$|E| \leq \frac{h}{2}M_2$$

Así, que como era de esperar, cuanto más pequeño es h , más pequeño es el error.

Usando también la fórmula de Taylor, se puede demostrar que para la fórmula centrada se verifica:

$$|E| \leq \frac{h^2}{12} M_2$$

En igualdad de condiciones, si $h < 1$, este error es menor que el de las fórmulas no centradas, como habíamos visto en el ejemplo.

Analogamente se pueden calcular aproximaciones de derivadas segundas, como por ejemplo:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Y el error de la fórmula sería:

$$|E| \leq \frac{h^2}{12} M_2$$

Vemos que los errores dependen del paso h . Y cuanto menor sea este, menor será el error del método. Pero al hacer disminuir h los errores de redondeo aumentan. El problema ocurre en dos fases:

1. Al ser h pequeño, estamos restando números muy parecidos, con lo que se produce el llamado error de cancelación que conlleva la pérdida de cifras significativas en el resultado.
2. Al ser h pequeño, cuando dividimos entre h magnificamos el error cometido en el primer paso.

Este es el caso en las fórmulas de derivación numérica cuando h se hace muy pequeño. Por ello aunque el error del método disminuye con h , en la práctica no es conveniente tomarlo muy pequeño puesto que se disparan los errores de redondeo.

Para el caso particular de la fórmula centrada, como vimos antes, el error del método es proporcional a h^2 . El error de redondeo es inversamente proporcional a h . Por lo tanto, el error total:

$$Error = Ch^2 + \frac{\epsilon}{h}$$

Es decir, es una función en la que el error primero disminuye con h y luego aumenta, como se puede ver en la figura 2:

Ejemplo 5.2 Tomemos $f(x) = \ln x$. Vamos a calcular $f'(1.1)$ usando la fórmula centrada $f'(1.1) \approx \frac{f(1.1+h)-f(1.1-h)}{2h}$. El valor exacto es 0.9091. Redondearemos usando 4 cifras decimales. Obtenemos:

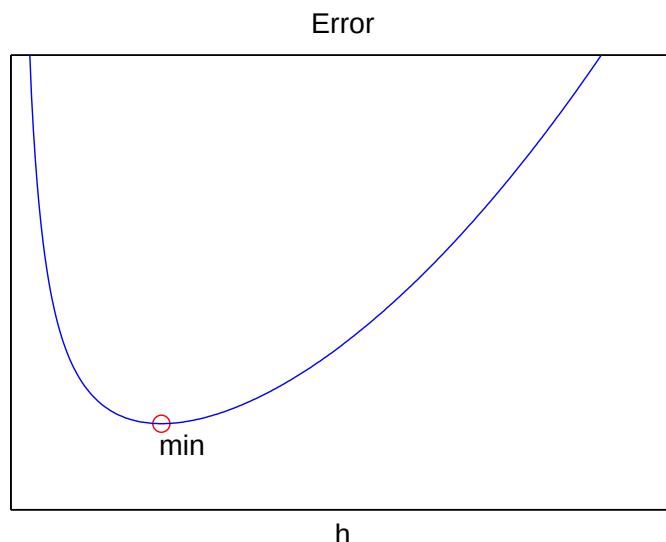


Figura 2: Función de error para la fórmula centrada

h	$f(1.1 + h)$	$f(1.1 - h)$	$f(1.1 + h) - f(1.1 - h)$	$f'(1.1) \approx$	Error
0.1000	0.1823	0.0000	0.1823	0.9115	0.0024
0.0900	0.1740	0.0100	0.1640	0.9111	0.0020
0.0800	0.1655	0.0198	0.1457	0.9106	0.0015
0.0700	0.1570	0.0296	0.1274	0.9100	0.0009
0.0600	0.1484	0.0392	0.1092	0.9100	0.0009
0.0500	0.1398	0.0488	0.0910	0.9100	0.0009
0.0400	0.1310	0.0583	0.0727	0.9088	0.0003
0.0300	0.1222	0.0677	0.0545	0.9083	0.0008
0.0200	0.1133	0.0770	0.0363	0.9075	0.0016
0.0100	0.1044	0.0862	0.0182	0.9100	0.0009
0.0090	0.1035	0.0871	0.0164	0.9111	0.0020
0.0080	0.1026	0.0880	0.0146	0.9125	0.0034
0.0070	0.1017	0.0889	0.0128	0.9143	0.0052
0.0060	0.1007	0.0898	0.0109	0.9083	0.0008
0.0050	0.0998	0.0908	0.0090	0.9000	0.0091
0.0040	0.0989	0.0917	0.0072	0.9000	0.0091
0.0030	0.0980	0.0926	0.0054	0.9000	0.0091
0.0020	0.0971	0.0935	0.0036	0.9000	0.0091
0.0010	0.0962	0.0944	0.0018	0.9000	0.0091

Como se puede ver, al disminuir h , $f(1.1 + h)$ y $f(1.1 - h)$ cada vez se parecen más, con el consiguiente error de cancelación amplificado por la división por un denominador, $2h$, cada vez menor. Así, primero el error disminuye, pero a partir de cierto valor de h , aumenta. Para los valores probados, el error es mínimo en $h = 0.0400$.

Tenemos problemas parecidos con todas las fórmulas de diferenciación numérica. Por ello decimos que la diferenciación numérica es *inestable*.

5.2. Integración numérica

Las fórmulas de integración numérica o de cuadratura son de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n) \quad (1)$$

donde $x_0, x_1, \dots, x_n$ (nodos) son $n+1$ puntos distintos pertenecientes al intervalo $[a, b]$ y $A_0, A_1, \dots, A_n$ (pesos) son números reales.

Definición 5.1 Una fórmula de cuadratura (1) es de tipo interpolatorio $\iff$ se ha obtenido mediante la integral del polinomio P_n que interpola a f en los puntos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b [f(x_0)\ell_0(x) + f(x_1)\ell_1(x) + \cdots + f(x_n)\ell_n(x)]dx = \\ &= f(x_0) \int_a^b \ell_0(x)dx + f(x_1) \int_a^b \ell_1(x)dx + \cdots + f(x_n) \int_a^b \ell_n(x)dx \end{aligned}$$

Por tanto una fórmula de cuadratura (1) es de tipo interpolatorio $\iff$

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x)dx, \quad A_1 = \int_a^b \ell_1(x)dx, \dots, \quad A_n = \int_a^b \ell_n(x)dx$$

siendo ℓ_i el polinomio i -ésimo de la base de Lagrange:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}, \dots, \quad \ell_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

Ejemplo 5.3 $\int_0^2 f(x)dx \approx 3f(0) + f(2)$ no es de tipo interpolatorio ya que

$$\int_0^2 \ell_0(x)dx = \int_0^2 \frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx = \int_0^2 \frac{x-2}{0-2}dx = 1 \neq A_0 = 3$$

El demostrar si una fórmula de cuadratura es o no de tipo interpolatorio se hace más fácil (en general) con la introducción del *grado de precisión*.

Definición 5.2 Una fórmula de cuadratura tiene grado de precisión, al menos, $n \iff$ es exacta para $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2, \dots$, $f(x) = x^n$ y por tanto para todo polinomio de grado $\leq n$.

Definición 5.3 Una fórmula de cuadratura tiene grado de precisión exactamente $n \iff$ es exacta para $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2, \dots$, $f(x) = x^n$ pero no es exacta para $f(x) = x^{n+1}$.

Se verifica que una fórmula de cuadratura con $n + 1$ nodos es de tipo interpolatorio $\iff$ tiene grado de precisión, al menos, n .

Ejemplo 5.4

$$\int_0^4 f(x)dx \approx 2f(1) + 2f(3)$$

es de tipo interpolatorio ya que tiene de grado de precisión al menos uno.

$$\text{Exacta para } f(x) = 1 \iff \int_0^4 dx = 2 + 2 \text{ se cumple}$$

$$\text{Exacta para } f(x) = x \iff \int_0^4 xdx = 2 + 6 \text{ se cumple}$$

Se demuestra además que el grado de precisión es exactamente uno ya que la fórmula no es exacta para $f(x) = x^2$ puesto que $\int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3}$ y $2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3^2 = 20$.

5.3. Fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes simples

Son fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio, eligiendo los puntos de interpolación (nodos de la fórmula) igualmente separados de una de las dos formas siguiente:

- Fórmulas *cerradas*: los límites de integración a y b son nodos de la fórmula.



- Fórmulas *abiertas*: ninguno de los límites de integración es nodo de la fórmula.



De las fórmulas de Newton-Cotes cerradas, las más sencillas son la de los trapecios (2 nodos) y la de Simpson (3 nodos). También deduciremos la fórmula del punto medio, que es una fórmula de Newton-Cotes abierta con un nodo.

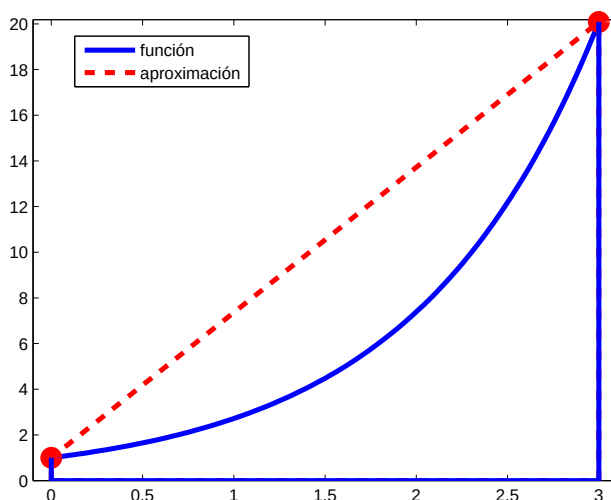


Figura 3: Regla del trapecio para $\int_0^3 e^x dx$

5.3.1. Fórmula de los trapecios

Usar la fórmula de los trapecios para integrar una función en un intervalo, equivale a sustituir, dentro de la integral, la función a integrar por el polinomio de interpolación de grado uno, que pasa por los puntos de la función de los extremos del intervalo. Es decir, sustituimos la función por una recta e integramos. Estamos entonces calculando el área de un trapecio:

Es una fórmula de Newton-Cotes cerrada con dos nodos $x_0 = a$, $x_1 = b$.

$$\int_a^b f(x) dx \approx A_0 f(a) + A_1 f(b)$$

Tenemos que obtener los pesos de la fórmula teniendo en cuenta que ha de ser una fórmula de tipo interpolatorio.

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x) dx = \int_a^b \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \int_a^b \frac{x - b}{a - b} dx = \dots = \frac{b - a}{2}$$

Como el grado de precisión de la fórmula ha de ser al menos uno, sabemos que ha de ser exacta para $f(x) = 1$ y $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} \text{exacta para } f(x) = 1 &\iff \int_a^b dx = A_0 + A_1 \quad \text{es decir, } A_0 + A_1 = b - a \\ A_1 &= (b - a) - \frac{b - a}{2} = \frac{b - a}{2} \end{aligned}$$

La fórmula es:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b - a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Se demuestra que no es exacta para $f(x) = x^2$ y por tanto el grado de precisión es exactamente uno.

Ejemplo 5.5 Calculemos la integral $\int_0^3 e^x dx$ que aparece en la figura 3. El valor exacto es:

$$\int_0^3 e^x dx = (e^x)_0^3 = e^3 - e^0 = 20.0855 - 1 = 19.0855$$

Y usando la regla del trapecio, el valor aproximado es:

$$\int_0^3 f(x) dx \approx \frac{3-0}{2} [f(0) + f(3)] = 1.5(e^0 + e^3) = 31.6283$$

El error es muy grande porque, como se ve en la figura 3, en este caso, la recta es una mala aproximación de la función.

Error de la fórmula de los trapecios

$$E^T = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(c), \quad c \in (a, b) \quad (2)$$

El error depende del cubo de la longitud del intervalo $(b-a)^3$. Si disminuimos la longitud del intervalo, el error disminuye rápidamente. Esto se puede lograr dividiendo el intervalo en subintervalos, aplicándolo en cada uno de ellos y sumando los resultados. El inconveniente es que aumentamos el número de operaciones.

Ejemplo 5.6 Para el ejemplo anterior el error es:

$$|E^T| = 31.6283 - 19.0855 = 12.5428 \quad (3)$$

Según la fórmula (2):

$$|E^T| = \frac{(3-0)^3}{12} f''(c), \quad c \in (0, 3)$$

y por lo tanto:

$$|E^T| < \frac{(3-0)^3}{12} e^3 = 45.19$$

comparando con (3) vemos que se cumple.

Si subdividiéramos el intervalo en tres subintervalos iguales, calculamos en cada uno de ellos la integral con la fórmula de los trapecios y sumamos los resultados, tendríamos que sumar el error correspondiente a cada intervalo y una cota del error total sería:

$$|E^T| < \frac{(1-0)^3}{12} e^1 + \frac{(2-1)^3}{12} e^2 + \frac{(3-2)^3}{12} e^3 = 2.5$$

que es mucho menor que el error (3). Y entonces estaríamos usando una fórmula compuesta.

5.3.2. Fórmula de Simpson

Usar la fórmula de Simpson para integrar una función en un intervalo, equivale a sustituir, dentro de la integral, la función a integrar por el polinomio de interpolación de grado dos, que pasa por los puntos de la función de los extremos y el punto medio del intervalo. Es decir, sustituimos la función por una parábola e integramos:

Es una fórmula de Newton-Cotes cerrada con tres nodos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$.

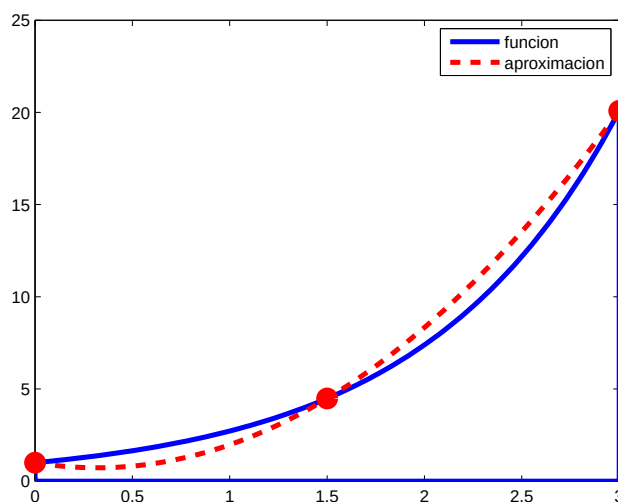


Figura 4: Regla de Simpson para $\int_0^3 e^x dx$

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(a) + A_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + A_2 f(b)$$

Se demuestra que:

$$A_0 = A_2 = \frac{b-a}{6} \quad \text{y} \quad A_1 = \frac{2(b-a)}{3}$$

La fórmula es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Se demuestra que es exacta para $f(x) = x^3$ y no lo es para $f(x) = x^4$; por tanto el grado de precisión es exactamente tres.

Ejemplo 5.7 Calculemos la integral $\int_0^3 e^x dx$ que aparece en la figura 4. El valor exacto ya lo calculamos en el ejemplo anterior:

$$\int_0^3 e^x dx = 19.0855$$

Y el valor aproximado, usando la regla de Simpson, es:

$$\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3-0}{6} [f(0) + 4f(1.5) + f(3)] = 0.5(e^0 + 4e^{1.5} + e^3) = 19.5061$$

Ahora el error ha disminuido mucho respecto al de los trapecios porque, como se ve en la figura 4 la función aproximada, es decir, la parábola, se ajusta mucho mejor.

Error de la fórmula de Simpson

$$E^S = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c), \quad c \in (a, b)$$

El error depende de la potencia quinta de la longitud del intervalo, $(b-a)^5$. Si disminuimos la longitud del intervalo, el error disminuye rápidamente, más que en el caso de los trapecios.

5.3.3. Regla del punto medio

Usar la fórmula del punto medio para integrar una función en un intervalo, equivale a sustituir, dentro de la integral, la función a integrar por el polinomio de interpolación de grado cero, que pasa por el punto medio de la función en el intervalo. Es decir, sustituimos la función por una recta horizontal e integramos. Estamos calculando el área de un rectángulo:

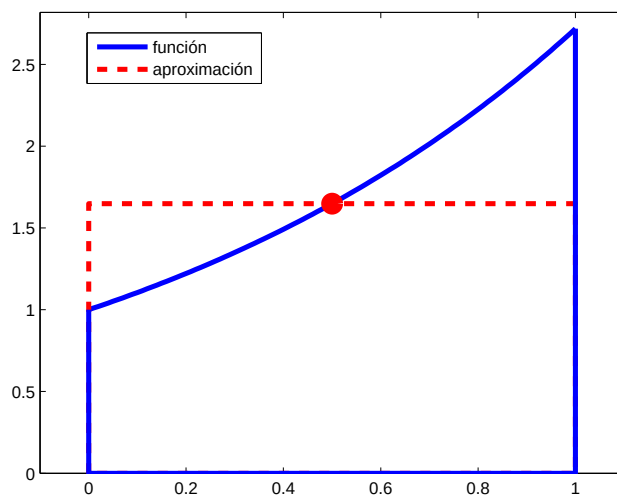


Figura 5: Regla del punto medio para $\int_0^1 e^x dx$

Es una fórmula de Newton Cotes abierta con un nodo $x_0 = \frac{a+b}{2}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Como el grado de precisión de la fórmula ha de ser al menos cero, sabemos que ha de ser exacta para $f(x) = 1$

$$\text{exacta para } f(x) = 1 \iff \int_a^b dx = A_0 \text{ es decir, } A_0 = b - a$$

Y la fórmula es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Se demuestra que la fórmula anterior es exacta para $f(x) = x$ y no lo es para $f(x) = x^2$; por tanto su grado de precisión es uno.

Ejemplo 5.8 Calculemos la integral $\int_0^1 e^x dx$ que aparece en la figura 5. El valor exacto es:

$$\int_0^1 e^x dx = (e^x)_0^1 = e^1 - e^0 = 2.7183 - 1 = 1.7183$$

Y el valor aproximado:

$$\int_0^1 e^x dx \approx (1-0) e^{0.5} = 1.6487$$

Aquí el error es menor de lo que cabría esperar, puesto que la función aproximada no se ajusta bien. Pero hay un efecto de compensación: el error que suma por la izquierda lo resta por la derecha, como se puede ver en la figura 5.

Ejemplo 5.9 Deducir la fórmula de Newton-Cotes abierta con dos nodos.

Equivale a sustituir, dentro de la integral, la función a integrar por el polinomio de interpolación de grado uno, que pasa por dos puntos a $1/3$ y a $2/3$ de la función en el intervalo. Es decir, sustituimos la función por una recta e integramos. Estamos calculando el área de un trapecio.

Los nodos serían:

$$x_0 = a + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3}, \quad x_1 = b - \frac{b-a}{3} = \frac{a+2b}{3}$$

Y la fórmula sería de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + A_1 f\left(\frac{a+2b}{3}\right)$$

Calculamos A_0 :

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x)dx = \int_a^b \frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx = (t=x-x_1, \quad h=x_1-x_0) = \int_{-2h}^h \frac{t}{-h}dt = \frac{3}{2}h = \frac{b-a}{2}$$

Como el grado de precisión de la fórmula ha de ser al menos uno, sabemos que ha de ser exacta para $f(x) = 1$ y $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} \text{exacta para } f(x) = 1 &\iff \int_a^b dx = A_0 + A_1 \text{ es decir, } A_0 + A_1 = b - a \\ A_1 &= (b - a) - \frac{b - a}{2} = \frac{b - a}{2} \end{aligned}$$

Lo fórmula es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right]$$

Se demuestra que no es exacta para $f(x) = x^2$ y por tanto el grado de precisión es exactamente uno.

5.4. Fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes compuestas

Aunque vemos que, en general, la fórmula de Simpson proporciona un error menor que la regla de los trapecios, y esta a su vez proporciona un error menor que la regla del punto medio, al aumentar el número de nodos de las fórmulas simples, el error no tiende a cero. Una alternativa para disminuir el error es aumentar el número de nodos utilizando las fórmulas compuestas. Estas se obtienen dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos y aplicando a cada uno de estos subintervalos una fórmula de cuadratura sencilla, ya que así se reducirá considerablemente el error.

5.4.1. Trapecios compuesta

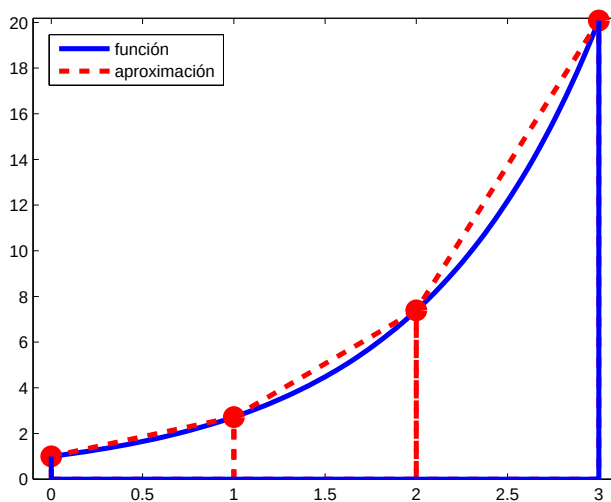


Figura 6: Regla del trapecio compuesta con $n = 3$ para $\int_0^3 e^x dx$

Dado $[a, b]$ y $n \geq 1$ sea $h = \frac{b-a}{n}$ y definimos $x_i = a + ih$ $i = 0, \dots, n$

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \dots, \quad x_n = a + nh = b$$

En cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se sustituye la función integrando f por el polinomio de grado uno P_{1i} , es decir, por la recta que pasa por los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{1i}(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] = \\ &= \frac{(b-a)}{2n} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \end{aligned}$$

Ejemplo 5.10 Calculemos la integral $\int_0^3 e^x dx$ que aparece en la figura 6 y comparemos el resultado con el obtenido con la regla de los trapecios simple, de la figura 3. El valor exacto era:

$$\int_0^3 e^x dx = 19.0855$$

Dividiendo en 3 subintervalos, como la fórmula es de Newton-Cotes los nodos tienen que estar igualmente separados y serán:

$$a = x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad y \quad x_3 = b = 3$$

Y el valor aproximado:

$$\int_0^3 f(x) dx \approx \frac{3-0}{(2)(3)} [f(0) + 2(f(1) + f(2)) + f(3)] = 0.5(e^0 + 2(e^1 + e^2) + e^3) = 20.6501$$

Vemos que el resultado ha mejorado mucho respecto al de la fórmula simple, como era de esperar, puesto que en intervalos menores, la recta es una mejor aproximación. El error es:

$$E = 20.6501 - 19.0855 = 1.5646$$

que es menor que 2.5, como habíamos previsto en el ejemplo 5.6.

Error de la fórmula de los trapecios compuesta

$$E_h^T = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(c), \quad c \in (a, b)$$

En el caso de la integración numérica el error de redondeo no aumenta al disminuir h y aumentar el número de operaciones. Por ello se dice que este procedimiento es *estable* cuando h tiende a 0, al contrario que la diferenciación numérica.

Ejemplo 5.11 *El error previsto en el caso del ejemplo anterior sería:*

$$|E_1^T| = \frac{(3-0)1^2}{12} |f''(c)| < \frac{3}{12} e^3 = 5.02$$

que es una predicción cierta aunque menos ajustada que la que hicimos en el ejemplo 5.6.

5.4.2. Simpson compuesta

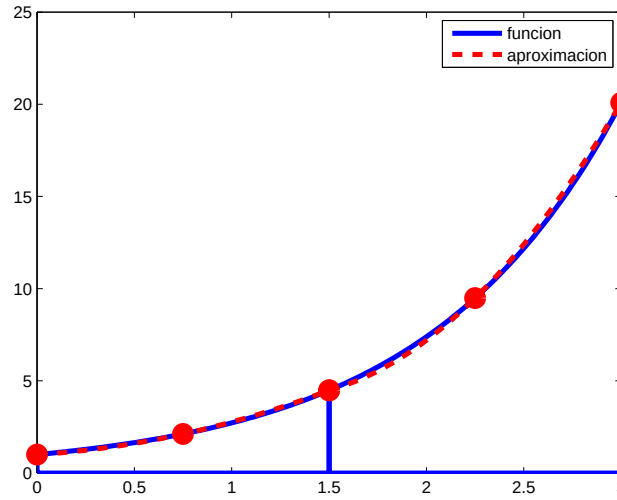


Figura 7: Regla del Simpson compuesta con $m = 2$ para $\int_0^3 e^x dx$

Vamos a aplicar la fórmula simple de Simpson m veces. Para ello dividimos $[a, b]$ en $n = 2m$ intervalos iguales. Es decir, dado $[a, b]$ y $n \geq 1$ sea $h = \frac{b-a}{n}$ y definimos $x_i = a + ih$ $i = 0, \dots, n$

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \dots, \quad x_n = a + nh = b$$

Los subintervalos de la partición serán $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2m-2}, x_{2m}]$ y los puntos medios de los mismos $x_1, x_3, \dots, x_{2m-1}$.

En cada intervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ se sustituye la función integrando f por el polinomio de grado dos P_{2i} , es decir, la parábola que pasa por los puntos $(x_{2i-2}, f(x_{2i-2}))$, $(x_{2i-1}, f(x_{2i-1}))$ y $(x_{2i}, f(x_{2i}))$ y se tiene:

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P_{2i}(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^m \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^m \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\ &\frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + f(b) \right] \end{aligned}$$

Ejemplo 5.12 Calculemos la integral $\int_0^3 e^x dx$ que aparece en la figura 7 y comparemos el resultado con el obtenido con la regla de Simpson simple, de la figura 4. El valor exacto era:

$$\int_0^3 e^x dx = 19.0855$$

Dividimos en 2 subintervalos, y luego cada uno de ellos en otros 2 otra vez. Es decir, en 4. Como la fórmula es de Newton-Cotes los nodos tienen que estar igualmente separados y $h = 3/4 = 0.75$:

$$a = x_0 = 0, \quad x_1 = 0.75 \quad x_2 = 1.5 \quad x_3 = 2.25 \quad y \quad x_4 = b = 3$$

Los nodos de los extremos, a y b suman con peso, o factor 1. A los interiores, si son pares, en este caso x_2 , se les multiplica por 2 y si son impares, es decir x_1 y x_3 se suman y se multiplican por 4. Es decir, el valor aproximado:

$$\begin{aligned} \int_0^3 f e^x dx &\approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + f(b) \right] = \\ &= \frac{0.75}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^1 f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^2 f(x_{2i-1}) + f(b) \right] = \\ &= 0.25 [e^a + 2e^{x_2} + 4(e^{x_1} + e^{x_3}) + e^b] = 0.25 [e^0 + 2e^{1.5} + 4(e^{0.75} + e^{2.25}) + e^3] = 19.1170 \end{aligned}$$

que mejora el resultado de la fórmula simple, como era de esperar.

Error de la fórmula de Simpson compuesta

$$E_h^S = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(iv)}(c), \quad c \in (a, b)$$

5.5. Otras fórmulas de cuadratura

Para disminuir el error de las fórmulas de cuadratura, además de usar más puntos para generar el polinomio de interpolación que aproxima a la función (punto medio, un punto; trapecios, dos puntos; Simpson, tres puntos...) y de dividir el intervalo de integración en subintervalos como se hace en las fórmulas compuestas, se usan otras estrategias como:

- En las **fórmulas de cuadratura gaussianas**, los puntos no se escogen igualmente separados, sino que se escogen de forma que el grado de precisión sea máximo.
- Los **métodos adaptativos de cuadratura** hacen depender h del grado de variación de la función: en las zonas de mayor variabilidad o con mayor pendiente se toman h menores. Es decir, usan un paso que se *adapta* a la función.
- La **integración de Romberg** usa la regla del trapecio compuesta para obtener una primera aproximación de la integral y luego combina estos resultados para obtener otros más precisos.

5.6. Ejercicios

Ejercicio 5.1 Calcular usando la fórmula del punto medio:

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

la integral:

$$\int_0^1 x dx$$

Calcular la integral exacta y dar el error. Dibujar el área exacta y aproximada y explicar el error.

Ejercicio 5.2 Usando la regla del trapecio compuesta con tres subintervalos, calcular:

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Calcular la integral exacta y el error. Hacer un dibujo del área exacta y la aproximada.

Ejercicio 5.3 Usando la regla de Simpson calcular:

$$\int_0^1 x^3 dx$$

Calcular la integral exacta y calcular el error. ¿Qué curva utiliza para aproximar la función la regla de Simpson? ¿Cómo explicarías el error?

Ejercicio 5.4 Dada la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \approx 1.77245$$

Aproximar la integral de forma que el resultado sea exacto hasta las décimas, usando la fórmula de los trapecios compuesta ¿Cuántos subintervalos son necesarios? (Indicación: se puede tomar un intervalo menor que $(-\infty, \infty)$, por ejemplo $[-2, 2]$)

Ejercicio 5.5 Supongamos que la fórmula de la integración numérica

$$\int_{-2}^2 f(x)dx \simeq A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

es de tipo interpolatorio. Determinar los coeficientes (pesos) de la fórmula utilizando las condiciones del grado de precisión. ¿Cuál es el grado de precisión de dicha fórmula? Razónese la respuesta. Calcular la integral si $f(x) = \cosh x$. ¿Con qué curva crees que hemos interpolado la función para aproximar su integral?

Ejercicio 5.6 Calcular los nodos y los pesos de la fórmula de Newton-Cotes abierta con dos nodos para el intervalo $[-1, 1]$. Determinar su grado de precisión. Calcular la integral si $f(x) = \cosh x$. ¿Con qué curva crees que hemos interpolado la función para aproximar su integral?

Ejercicio 5.7 1. Obtener x_0 para la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq 2f(x_0)$$

tenga grado de precisión al menos uno. ¿Cuál es su grado de precisión?

2. Obtener x_0 y x_1 para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq f(x_0) + f(x_1)$$

tenga grado de precisión al menos dos. ¿Cuál es su grado de precisión? ¿Es de Newton-Cotes?

3. Usar la fórmula obtenida anteriormente para calcular un valor aproximado de:

$$\int_{-2}^2 (x^2 + 1)dx$$

realizando previamente un cambio de variable adecuado. ¿Qué error se comete al aplicar dicha fórmula en este ejercicio?. Justificar la respuesta sin hacer la integral exacta.

Ejercicio 5.8 1. Aproximar mediante las reglas del trapecio y de Simpson el valor de la integral

$$I = \int_0^3 (x^3 + 1)dx$$

2. Comparar los valores aproximados con el valor exacto. ¿Se podría haber predicho alguno de los errores?

3. Utilizando la regla de los trapecios compuesta para aproximar I , ¿qué número de subintervalos será suficiente para que el error, en valor absoluto, sea menor que 10^{-6} ?

Ejercicio 5.9 Sea la integral:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

1. Obtener el valor aproximado de la integral mediante la regla del trapecio compuesta con dos subintervalos. Acotar el error en valor absoluto usando la fórmula del error.

2. Determinar el número n de subintervalos de modo que la regla del trapecio compuesta aproxime el valor de I con un error menor que 10^{-6} .

Ejercicio 5.10 Es conocido que

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

y damos como dato que si f tiene derivada cuarta continua en $[a, b]$ entonces el error de la fórmula de Simpson compuesta viene dado por:

$$E_h^S = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(iv)}(c), \quad c \in (a, b)$$

1. Aproximar el valor de $\log 2$ mediante la fórmula de Simpson compuesta que utiliza dos subintervalos (es decir, cinco nodos) y acotar el error en valor absoluto usando la fórmula del error. Comparar esta cota con el error verdadero.
2. Determinar el número total de nodos que serán suficientes para que la fórmula de Simpson compuesta proporcione un valor aproximado de $\log 2$ con un error menor que 10^{-4} .

Ejercicio 5.11 Si se utiliza la regla de los trapecios compuesta para aproximar:

$$I = \int_1^2 \ln^2(x) dx$$

¿Qué número de subintervalos será suficiente elegir para que el error fuese menor que 10^{-3} ?

Ejercicio 5.12 1. Encontrar las constantes A_0 , A_1 , x_1 de modo que la fórmula de cuadratura simple:

$$\int_0^1 f(x) dx \simeq A_0 f(0) + A_1 f(x_1)$$

tenga el grado de precisión más alto posible. ¿Cuál es el grado de precisión? ¿Es una fórmula de Newton-Cotes?

2. Realizar un cambio de variable en la integral

$$\int_0^2 (1 + e^{-x^2}) dx$$

para poder utilizar la fórmula obtenida anteriormente y calcular de esa manera una aproximación del valor de dicha integral.

5.6.1. Figuras

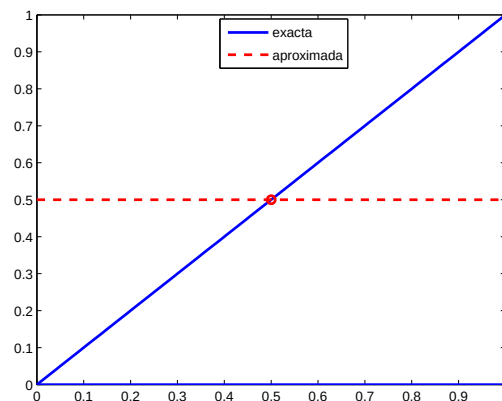


Figura 8: $\int_0^1 x dx$, integral exacta y aproximada con la regla del punto medio simple

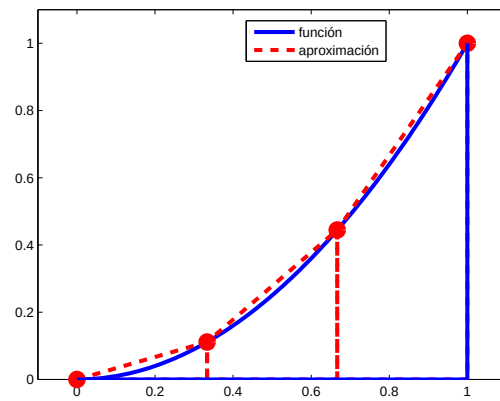


Figura 9: $\int_0^1 x^2 dx$, integral exacta y aproximada con trapecios compuestos con $n = 3$

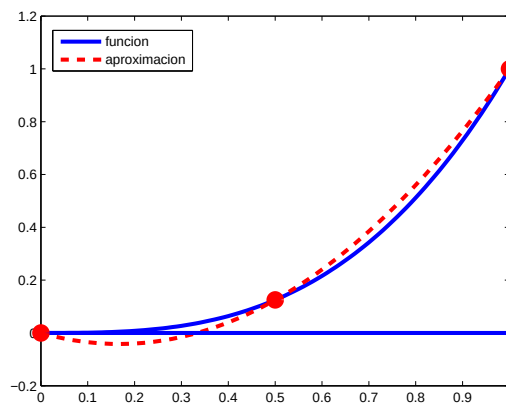


Figura 10: $\int_0^1 x^3 dx$, integral exacta y aproximada con Simpson simple

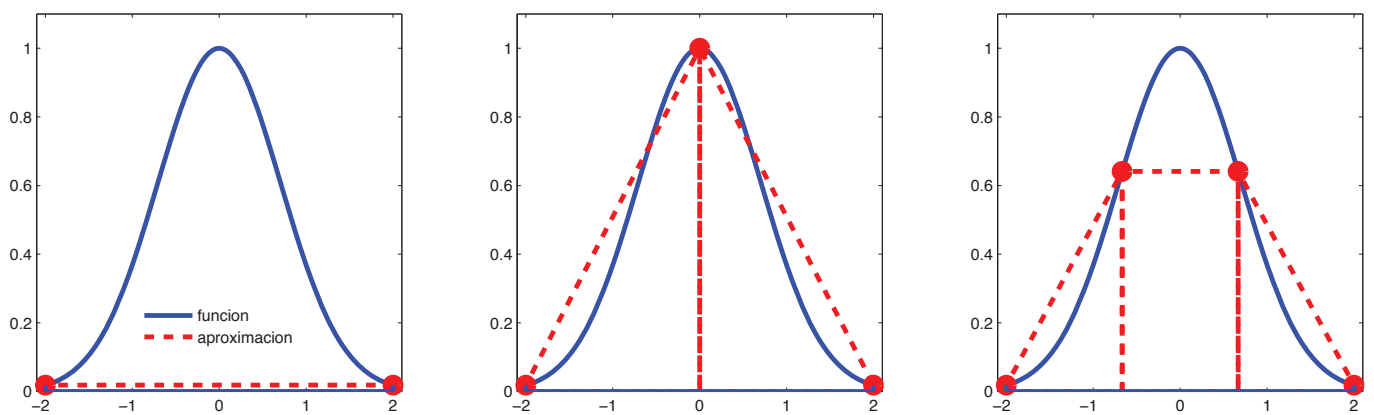


Figura 11: Regla de los trapecios compuesta con $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ para $\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$

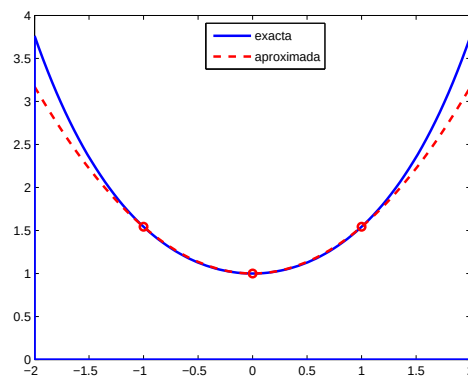


Figura 12: Cálculo de $\int_{-2}^2 \cosh(x)dx$ usando la fórmula obtenida

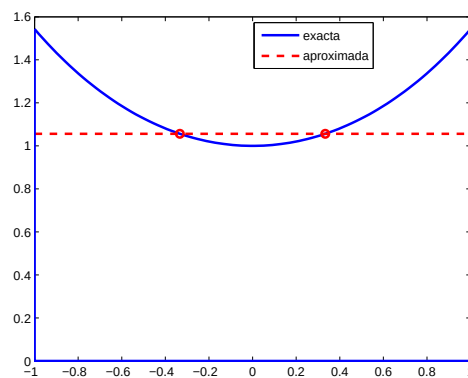


Figura 13: Cálculo de $\int_{-1}^1 \cosh(x)dx$ usando la fórmula obtenida

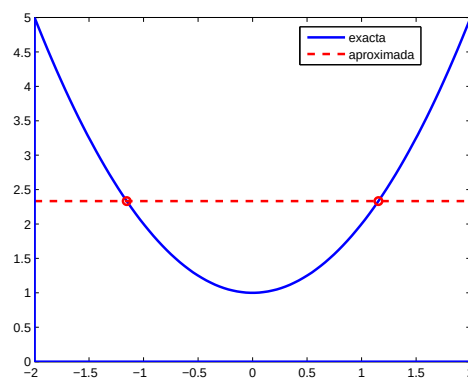


Figura 14: Cálculo de $\int_{-2}^2 (x^2 + 1)dx$ usando la fórmula obtenida

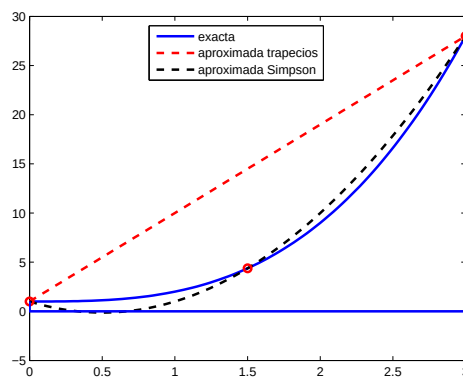


Figura 15: Cálculo de $\int_0^3 (x^3 + 1)dx$ usando la fórmula del trapecio y la de Simpson

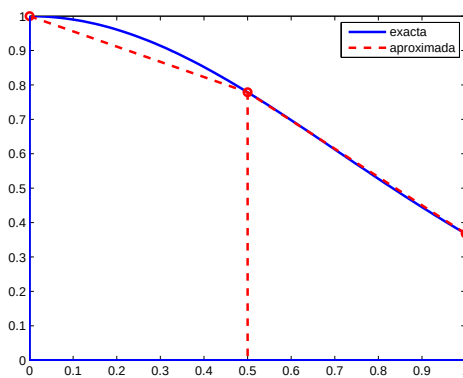


Figura 16: Cálculo de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ usando la fórmula del trapecio con dos subintervalos

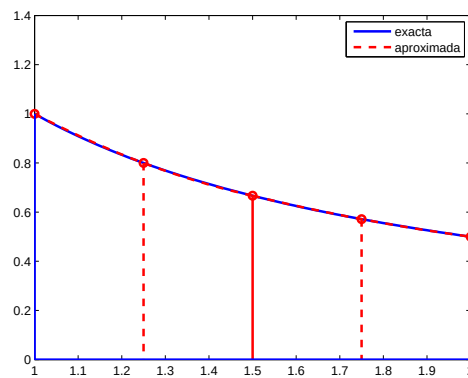


Figura 17: Cálculo de $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ usando la fórmula del Simpson con dos subintervalos

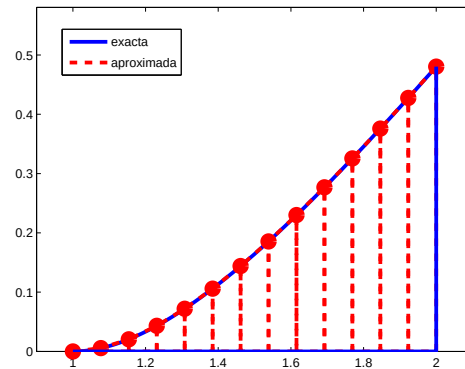


Figura 18: Cálculo de $\int_1^2 \ln^2(x)dx$ usando la fórmula del los trapecios con 13 subintervalos

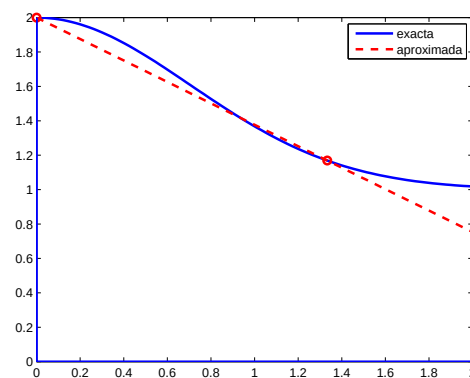


Figura 19: Cálculo de $\int_0^2 (1 + e^{-x^2})dx$ usando la fórmula obtenida