

5. Derivación e integración numérica

5.1. Ejercicios

Ejercicio 5.1 Calcular usando la fórmula del punto medio:

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

la integral:

$$\int_0^1 xdx$$

Calcular la integral exacta y dar el error. Dibujar el área exacta y aproximada y explicar el error.

Solución

La integral aproximada es:

$$\int_0^1 xdx \approx (1-0)\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Mientras que la integral exacta es:

$$\int_0^1 xdx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto el error es:

$$E = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Como vemos en la figura, aunque integramos funciones distintas, los errores se compensan,

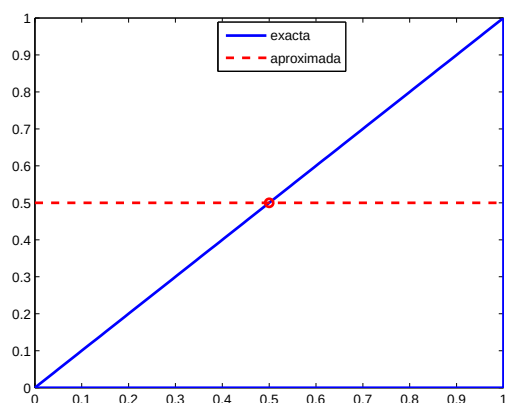


Figura 1: $\int_0^1 xdx$, integral exacta y aproximada con la regla del punto medio simple

porque el error que introducimos al tener en cuenta el área del triángulo que añadimos por la derecha, lo quitamos luego, al no tener en cuenta el área del triángulo de la izquierda.

Ejercicio 5.2 Usando la regla del trapecio compuesta con tres subintervalos, calcular:

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Calcular la integral exacta y el error. Hacer un dibujo del área exacta y la aproximada.

Solución

Si usamos la regla compuesta del trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2n} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$

con $n = 3$, $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$ entonces $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ y:

$$\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{(1-0)}{(2)(3)} \left[0^2 + 2 \left[\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] + 1^2 \right] = \frac{19}{54} = 0,352$$

Y el valor exacto es:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} = 0,333$$

Y el error:

$$E = 0,352 - 0,333 = 0,019$$

Otra forma de hacer lo mismo podría ser usar de forma repetida la fórmula simple:

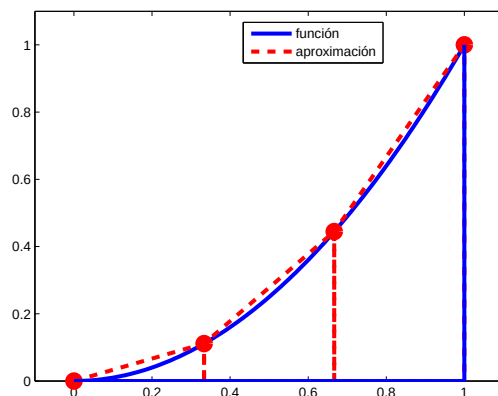


Figura 2: $\int_0^1 x^2 dx$, integral exacta y aproximada con trapecios compuestos con $n = 3$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Dividimos la integral en tres y aplicamos tres veces la fórmula simple:

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^{\frac{1}{3}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} x^2 dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 x^2 dx \approx$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{\frac{1}{3} - 0}{2} \left[0^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] + \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{2} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] + \frac{1 - \frac{2}{3}}{2} \left[1^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3} \right)}{2} \left[0^2 + 2 \left[\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] + 1^2 \right] = \frac{19}{54} = 0,352
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.3 Usando la regla de Simpson calcular:

$$\int_0^1 x^3 dx$$

Calcular la integral exacta y calcular el error. ¿Qué curva utiliza para aproximar la función la regla de Simpson? ¿Cómo explicarías el error?

Solución

El valor exacto es:

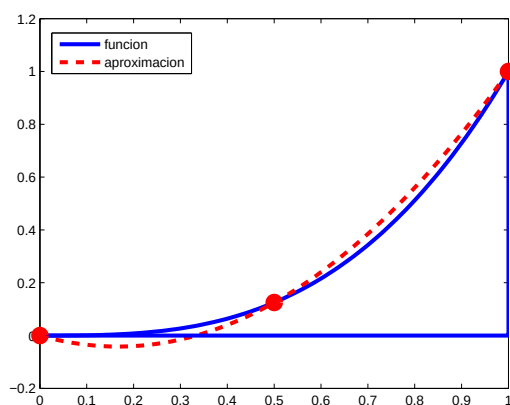


Figura 3: $\int_0^1 x^3 dx$, integral exacta y aproximada con Simpson simple

$$\int_0^1 x^3 dx = \left(\frac{x^4}{4} \right)_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

La fórmula de Simpson es:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Y aplicando esta fórmula al cálculo de la integral:

$$\int_0^1 x^3 dx \approx \frac{1-0}{6} \left[(1)^3 + 4 \left(\frac{0+1}{2} \right)^3 + (1)^3 \right] = \frac{1}{4}$$

Y el error es cero.

Graficamente, podemos decir, que como en el ejercicio 5.1, y como se ve en la figura 3, los errores se compensan.

De forma más rigurosa, el error de la fórmula de Simpson es:

$$E^S = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c), \quad c \in (a, b)$$

Y para $f(x) = x^3$ se tiene que para cualquier c , $f^{(4)}(c) = 0$ y por lo tanto el error es 0. Es decir, la fórmula de Simpson tiene precisión al menos tres.

Ejercicio 5.4 Dada la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \approx 1,77245$$

Aproximar la integral de forma que el resultado sea exacto hasta las décimas, usando la fórmula de los trapecios compuesta ¿Cuántos subintervalos son necesarios? (Indicación: se puede tomar un intervalo menor que $(-\infty, \infty)$, por ejemplo $[-2, 2]$)

Solución

Vamos a utilizar la aproximación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$$

Vamos a hacerlo usando de forma repetida la fórmula simple:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Con $n = 1$:

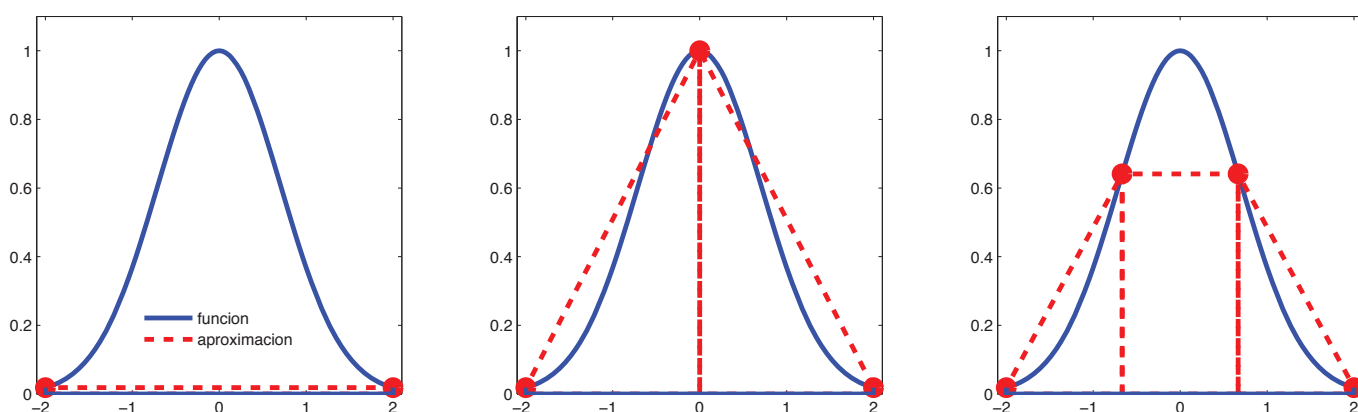


Figura 4: Regla de los trapecios compuesta con $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ para $\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$

$$\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{2 - (-2)}{2} [e^{-(-2)^2} + e^{-2^2}] = 0,073$$

No vale. Con $n = 2$:

$$\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx = \int_{-2}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^2 e^{-x^2} dx \approx$$

$$\approx \frac{0 - (-2)}{2} \left[e^{-(-2)^2} + e^{-0^2} \right] + \frac{2 - 0}{2} \left[e^{-2^2} + e^{-0^2} \right] = 2,036$$

No vale. Con $n = 3$:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 e^{-x^2} dx &= \int_{-2}^{-\frac{2}{3}} e^{-x^2} dx + \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} e^{-x^2} dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 e^{-x^2} dx \approx \\ &\approx \frac{-\frac{2}{3} - (-2)}{2} \left[e^{-(-2)^2} + e^{-(-\frac{2}{3})^2} \right] + \frac{\frac{2}{3} - (-\frac{2}{3})}{2} \left[e^{-(-\frac{2}{3})^2} + e^{-(\frac{2}{3})^2} \right] + \frac{2 - \frac{2}{3}}{2} \left[e^{-(\frac{2}{3})^2} + e^{-2^2} \right] = 1,734 \end{aligned}$$

Y este sí que vale.

Ejercicio 5.5 Supongamos que la fórmula de la integración numérica

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \simeq A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

es de tipo interpolatorio. Determinar los coeficientes (pesos) de la fórmula utilizando las condiciones del grado de precisión. ¿Cuál es el grado de precisión de dicha fórmula? Razónese la respuesta. Calcular la integral si $f(x) = \cosh x$. ¿Con qué curva crees que hemos interpolado la función para aproximar su integral?

Solución

Para que tenga precisión 0, la fórmula ha de ser exacta para $f(x) = 1$:

$$\int_{-2}^2 1 dx = A_0 (1) + A_1 (1) + A_2 (1)$$

Para que tenga precisión 1, además, la fórmula ha de ser exacta para $f(x) = x$ cumplir:

$$\int_{-2}^2 x dx = A_0 (-1) + A_1 (0) + A_2 (1)$$

Y para que tenga precisión 2, además, la fórmula ha de ser exacta para $f(x) = x^2$ cumplir:

$$\int_{-2}^2 x^2 dx = A_0 (-1)^2 + A_1 (0)^2 + A_2 (1)^2$$

Ahora tenemos un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 &= 4 \\ -A_0 + A_2 &= 0 \\ A_0 + A_2 &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Cuya solución es $A_0 = A_2 = \frac{8}{3}$ y $A_1 = -\frac{4}{3}$. Y por lo tanto la fórmula queda:

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \simeq \frac{8}{3} f(-1) - \frac{4}{3} f(0) + \frac{8}{3} f(1)$$

Por su construcción, sabemos que tiene precisión al menos 2. Veamos cual es la precisión. Para ver si tiene precisión al menos 3 probamos con $f(x) = x^3$:

$$\int_{-2}^2 x^3 dx \stackrel{?}{=} \frac{8}{3} (-1)^3 - \frac{4}{3} (0)^3 + \frac{8}{3} (1)^3$$

Operando:

$$0 = -\frac{8}{3} + 0 + \frac{8}{3}$$

Y tiene precisión al menos 3. Veamos precisión 4 con $f(x) = x^4$:

$$\int_{-2}^2 x^4 dx \stackrel{?}{=} \frac{8}{3}(-1)^4 - \frac{4}{3}(0)^4 + \frac{8}{3}(1)^4$$

Operando:

$$\frac{64}{5} \neq \frac{8}{3} - 0 + \frac{8}{3}$$

Por lo tanto, el grado de precisión de la fórmula es 3.

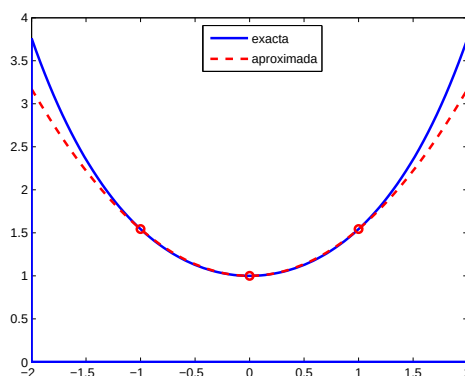


Figura 5: Cálculo de $\int_{-2}^2 \cosh(x) dx$ usando la fórmula calculada

$$\int_{-2}^2 \cosh(x) dx \simeq \frac{8}{3} \cosh(-1) - \frac{4}{3} \cosh(0) + \frac{8}{3} \cosh(1) = 6,89$$

El resultado exacto es mayor, como se puede ver en el dibujo.

$$\int_{-2}^2 \cosh(x) dx = \sinh(x)^2_{-2} = 7,25$$

Y el error es $E = 0,35$

La curva que interpola, como usamos tres puntos, es una parábola.

Ejercicio 5.6 Calcular los nodos y los pesos de la fórmula de Newton-Cotes abierta con dos nodos para el intervalo $[-1, 1]$. Determinar su grado de precisión. Calcular la integral si $f(x) = \cosh x$. ¿Con qué curva crees que hemos interpolado la función para aproximar su integral?

Solución

Por ser de Newton-Cotes abierta en el intervalo $[-1, 1]$ hemos de tomar dos nodos a igual distancia entre sí y de los extremos, es decir, como el intervalo mide 2 habrán de estar separados $\frac{2}{3}$ y serán $x_0 = -\frac{1}{3}$ y $x_1 = \frac{1}{3}$ y la fórmula será de la forma:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq A_0 f\left(-\frac{1}{3}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{3}\right)$$

Razonando como en el ejercicio anterior, planteamos el sistema:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 & \quad \int_{-1}^1 1 dx = A_0(1) + A_1(1) \\ f(x) = x & \quad \int_{-1}^1 x dx = A_0\left(-\frac{1}{3}\right) + A_1\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Y operando, tenemos:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= 2 \\ -\frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{3}A_1 &= 0 \end{aligned}$$

Y resulta $A_0 = A_1 = 1$. Y para el intervalo $[-1, 1]$ la fórmula abierta de Newton-Cotes con dos nodos es:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq f\left(-\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$$

Para que tenga precisión 2, además, la fórmula ha de ser exacta para $f(x) = x^2$ y cumplir:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Pero no es así, puesto que:

$$\frac{2}{3} \neq \frac{2}{9}$$

Por lo tanto, el grado de precisión de la fórmula es 1.

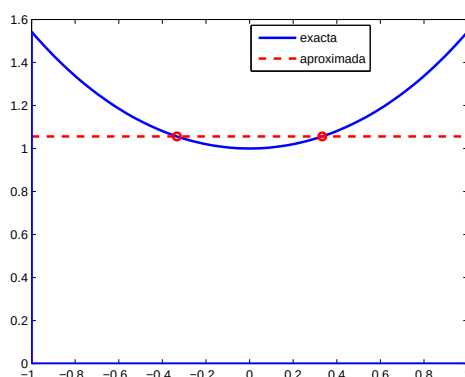


Figura 6: Cálculo de $\int_{-1}^1 \cosh(x) dx$ usando la fórmula obtenida

$$\int_{-2}^2 \cosh(x) dx \simeq \cosh\left(-\frac{1}{3}\right) + \cosh\left(\frac{1}{3}\right) = 2,11$$

El resultado exacto:

$$\int_{-1}^1 \cosh(x) dx = \sinh(x) \Big|_{-1}^1 = 2,35$$

Y el error es $E = 0,24$

Ejercicio 5.7 1. Obtener x_0 para la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq 2f(x_0)$$

tenga grado de precisión al menos uno. ¿Cuál es su grado de precisión?

2. Obtener x_0 y x_1 para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq f(x_0) + f(x_1)$$

tenga grado de precisión al menos dos. ¿Cuál es su grado de precisión? ¿Es de Newton-Cotes?

3. Usar la fórmula obtenida anteriormente para calcular un valor aproximado de:

$$\int_{-2}^2 (x^2 + 1)dx$$

realizando previamente un cambio de variable adecuado. ¿Qué error se comete al aplicar dicha fórmula en este ejercicio?. Justificar la respuesta sin hacer la integral exacta.

Solución

1. Para que tenga precisión al menos 1, la fórmula $\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq 2f(x_0)$ ha de ser exacta para $f(x) = 1$ y $f(x) = x$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) = 1 & \int_{-1}^1 1dx & = 2(1) \\ f(x) = x & \int_{-1}^1 xdx & = 2x_0 \end{array}$$

Y tenemos las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & 2 \\ 0 & = & 2x_0 \end{array}$$

Por lo tanto, $x_0 = 0$ y la fórmula queda:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq 2f(0)$$

que es la fórmula del punto medio para el intervalo $[-1, 1]$. Veamos si tiene precisión 2. Tendría que ser exacta para $f(x) = x^2$. Pero:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx \neq 2(0)^2$$

Por lo tanto la fórmula tiene precisión 1.

2. Tendría que ser exacta para $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$:

$$\begin{array}{rcl} \int_{-1}^1 1dx & = & 1 + 1 \\ \int_{-1}^1 xdx & = & x_0 + x_1 \\ \int_{-1}^1 x^2 dx & = & x_0^2 + x_1^2 \end{array}$$

Es decir:

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & 1 + 1 \\ 0 & = & x_0 + x_1 \\ \frac{2}{3} & = & x_0^2 + x_1^2 \end{array}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, con lo que la fórmula de cuadratura es:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Veamos si tiene precisión 3:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx \stackrel{?}{=} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Y como $\frac{1}{2} \neq 0$, la fórmula calculada tiene precisión 2. Esta fórmula tiene mayor precisión que la regla de los trapecios, que con 2 nodos, tiene precisión 1.

No es una fórmula de Newton-Cotes porque, contando los extremos del intervalo, no tiene los nodos igualmente separados.

3. Vamos a hacer un cambio de variable lineal que pase del intervalo $[-2, 2]$ a $[-1, 1]$. Será de

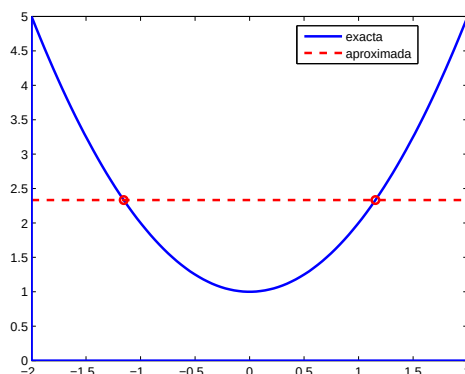


Figura 7: Cálculo de $\int_{-2}^2 (x^2 + 1)dx$ usando la fórmula obtenida

la forma $x = mt + n$:

$$\begin{array}{llll} \text{Si } x = -2 & \text{entonces } t = -1 & -2 = -m + n \\ \text{Si } x = 2 & \text{entonces } t = 1 & 2 = m + n \end{array}$$

con lo que $m = 2$ y $n = 0$ y el cambio de variable es $x = 2t$ y $dx = 2dt$:

$$\int_{-2}^2 (x^2 + 1)dx = \int_{-1}^1 ((2t)^2 + 1)2dt \simeq 2 \left[\left(2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)^2 + 1 \right] + \left[\left(2\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \right] = 9,33$$

La solución es exacta, y el error es cero, porque el integrando es un polinomio de grado dos y el grado de precisión es dos. Mirando el dibujo, vemos que es otro caso donde los errores se compensan. (Nota: los nodos para el intervalo $[-2, 2]$ son $x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ y $x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$)

Ejercicio 5.8 1. Aproximar mediante las reglas del trapecio y de Simpson el valor de la integral

$$I = \int_0^3 (x^3 + 1)dx$$

2. Comparar los valores aproximados con el valor exacto. ¿Se podría haber predicho alguno de los errores?
3. Utilizando la regla de los trapecios compuesta para aproximar I , ¿qué número de subintervalos será suficiente para que el error, en valor absoluto, sea menor que 10^{-6} ?

Solución

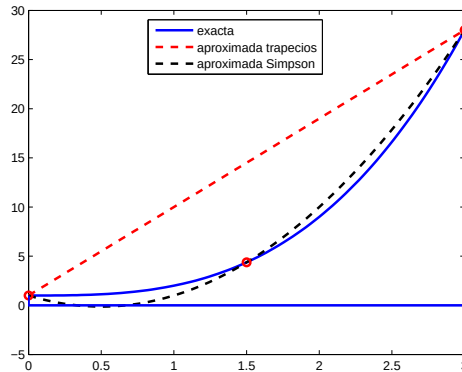


Figura 8: Cálculo de $\int_0^3 (x^3 + 1)dx$ usando la fórmula del trapecio y la de Simpson

1. La fórmula de los trapecios es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Y aplicándola:

$$\int_0^3 (x^3 + 1)dx \approx \frac{3-0}{2} [(0^3 + 1) + (3^3 + 1)] = 43,50$$

2. La fórmula de Simpson es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

La aplicamos

$$\int_0^3 (x^3 + 1)dx \approx \frac{3-0}{6} [(0^3 + 1) + 4(1.5^3 + 1) + (3^3 + 1)] = 23,25$$

El valor exacto es el dado por la fórmula de Simpson, porque esta es de precisión tres y estamos integrando un polinomio de grado tres.

3. El error de la fórmula de los trapecios compuesta es:

$$E_h^T = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(c), \quad c \in (a, b)$$

Como $f(x) = x^3$ tenemos que $f''(c) = 6c$ que para $c \in (0, 3)$, como en ese intervalo la derivada segunda es creciente, $|f''(c)| \leq 6(3) = 18$. Teniendo además en cuenta que $h = \frac{b-a}{n}$ donde n es el número de subintervalos y usando la fórmula del error:

$$|E_h^T| = \frac{(3-0) \left(\frac{3-0}{n}\right)^2}{12} 18 \leq 10^{-6}$$

Es decir:

$$\frac{3(3)^2 18}{12n^2} \leq 10^{-6}$$

Y despejando n :

$$\sqrt{\frac{3(3)^2 18 (10)^6}{12}} \leq n$$

Que es $6363,96 \leq n$. Es decir, para garantizar, con este criterio, que el error es menor que 10^{-6} , necesitamos al menos 6364 subintervalos. Esta es una condición suficiente, no necesaria.

Ejercicio 5.9 Sea la integral:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

1. Obtener el valor aproximado de la integral mediante la regla del trapecio compuesta con dos subintervalos. Acotar el error en valor absoluto usando la fórmula del error.
2. Determinar el número n de subintervalos de modo que la regla del trapecio compuesta aproxime el valor de I con un error menor que 10^{-6} .

Solución

1. Si usamos la regla compuesta del trapecio:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2n} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$

con $n = 2$, $f(x) = e^{-x^2}$, $a = 0$, $b = 1$ entonces $x_1 = \frac{1}{2}$ y:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{(1-0)}{2(2)} \left[e^{-0^2} + 2e^{-0.5^2} + e^{-1^2} \right] = 0,7314$$

Estimemos el error usando la fórmula del error de los trapecios compuesta:

$$E_h^T = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(c), \quad c \in (a, b)$$

Como $f(x) = e^{-x^2}$ tenemos que $f''(c) = e^{-c^2}(4c^2 - 2)$. Estudiemos el máximo en valor absoluto en el intervalo $[0, 1]$ de esta función.

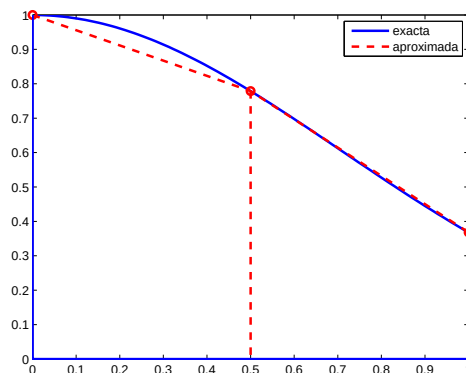


Figura 9: Cálculo de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ usando la fórmula del trapecio con dos subintervalos

Su derivada es $f'''(c) = e^{-c^2}(12c - 8c^3)$ que se anula en $1,22474$, $-1,22474$ y 0 . Es decir, fuera de nuestro intervalo. Por lo tanto el máximo estará en un extremo. Como $f''(0) = -2$ y $f''(1) = 0,73$ el máximo en valor absoluto es 2 y $|f''(c)| \leq 2$. Teniendo además en cuenta que $h = \frac{b-a}{n}$ donde n es el número de subintervalos y usando la fórmula del error:

$$|E_h^T| \leq \frac{(1-0) \left(\frac{1-0}{2}\right)^2}{12} 2 = 0.042 < 0.1$$

Y sabemos que al menos una cifra decimal es exacta.

El valor exacto es $0,7468$, el valor aproximado $0,7314$ y efectivamente, una cifra decimal es exacta. Y no hay dos cifras decimales exactas, por lo que en este caso, la estimación del error fue muy buena.

2. Usando la fórmula del error:

$$|E_h^T| = \frac{(1-0) \left(\frac{1-0}{n}\right)^2}{12} 2 \leq 10^{-6}$$

Es decir:

$$\frac{1(1)^2 2}{12n^2} \leq 10^{-6}$$

Y despejando n :

$$\sqrt{\frac{2(10)^6}{12}} \leq n$$

Que es $408,2 \leq n$. Es decir, para garantizar, con este criterio, que el error es menor que 10^{-6} , necesitamos al menos 409 subintervalos. Esta es una condición suficiente, no necesaria.

Ejercicio 5.10 Es conocido que

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

y damos como dato que si f tiene derivada cuarta continua en $[a, b]$ entonces el error de la fórmula de Simpson compuesta viene dado por:

$$E_h^S = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(iv)}(c), \quad c \in (a, b)$$

1. Aproximar el valor de $\log 2$ mediante la fórmula de Simpson compuesta que utiliza dos subintervalos (es decir, cinco nodos) y acotar el error en valor absoluto usando la fórmula del error. Comparar esta cota con el error verdadero.
2. Determinar el número total de nodos que serán suficientes para que la fórmula de Simpson compuesta proporcione un valor aproximado de $\log 2$ con un error menor que 10^{-4} .

Solución

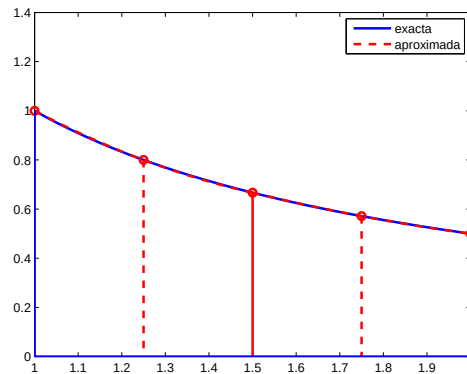


Figura 10: Cálculo de $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ usando la fórmula del Simpson con dos subintervalos

1. Dividimos $[1, 2]$ en 2 subintervalos, y luego cada uno de ellos en otros 2 otra vez. Es decir, en 4. Como la fórmula es de Newton-Cotes los nodos tienen que estar igualmente separados y $h = 1/4 = 0,25$:

$$a = x_0 = 1, \quad x_1 = 1,25 \quad x_2 = 1,5 \quad x_3 = 1,75 \quad y \quad x_4 = b = 2$$

Los nodos de los extremos, a y b suman con peso, o factor 1. A los interiores, si son pares, en este caso x_2 , se les multiplica por 2 y si son impares, es decir x_1 y x_3 se suman y se multiplican por 4. Es decir, el valor aproximado:

$$\begin{aligned} \int_0^3 f e^x dx &\approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + f(b) \right] = \\ &= \frac{0,25}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^1 f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^2 f(x_{2i-1}) + f(b) \right] = \\ &= \frac{0,25}{3} \left[\frac{1}{a} + 2 \frac{1}{x_2} + 4 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} \right) + \frac{1}{b} \right] = \frac{0,25}{3} \left[\frac{1}{1} + 2 \frac{1}{1,5} + 4 \left(\frac{1}{1,25} + \frac{1}{1,75} \right) + \frac{1}{2} \right] = 0,6933 \end{aligned}$$

El error de la fórmula de Simpson compuesta es:

$$E_h^S = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(iv)}(c), \quad c \in (a, b)$$

Como $f(x) = 1/x$ tenemos que $f^{(4)}(c) = 24/c^5$ que para $c \in (1, 2)$, como en ese intervalo la derivada cuarta es decreciente, $|f^{(4)}(c)| \leq 24/1 = 24$. Usando la fórmula del error:

$$|E_n^S| \leq \frac{0,25^4}{180} (2-1)^5 24 = 0,0005 < 0,001$$

Y el error es menor que una milésima y tiene tres cifras decimales exactas. El valor exacto es 0.6931, el valor aproximado 0.6933 y efectivamente, tres cifras decimales son exactas. Y no hay cuatro cifras decimales exactas, por lo que en este caso, la estimación del error fue muy buena.

2. El error de la fórmula de Simpson compuesta es:

$$E_h^S = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(iv)}(c), \quad c \in (a, b)$$

Como $h = \frac{b-a}{n}$

$$E_h^S = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(iv)}(c), \quad c \in (a, b)$$

y

$$|E_n^S| \leq \frac{1}{180n^4} 24 < 0,0001$$

Despejando n :

$$\left(\frac{240000}{180}\right)^{\frac{1}{4}} < n$$

Por lo tanto $6,04 < n$ y si tomamos $n = 8$ (y como $n = 2m$) $m = 4$ subintervalos, garantizamos que el error sea menor que 0,0001. $n = 7$ no vale porque tiene que ser par.

Ejercicio 5.11 Si se utiliza la regla de los trapecios compuesta para aproximar:

$$I = \int_1^2 \ln^2(x) dx$$

¿Qué número de subintervalos será suficiente elegir para que el error fuese menor que 10^{-3} ?

Solución

La fórmula del error de los trapecios compuesta:

$$E_h^T = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(c), \quad c \in (a, b)$$

Como $f(x) = \ln^2(x)$ tenemos que $f''(c) = \frac{2\ln c - 2}{c^2}$. Estudiemos el máximo en valor absoluto en el intervalo $[1, 2]$ de esta función.

Su derivada es $f'''(c) = \frac{4\ln c - 6}{c^3}$ que se anula en 4,48. Es decir, fuera de nuestro intervalo. Por lo tanto el máximo estará en un extremo. Como $f''(1) = 2$ y $f''(2) = 0,15$ el máximo en valor absoluto es 2 y $|f''(c)| \leq 2$. Teniendo además en cuenta que $h = \frac{b-a}{n}$ donde n es el número de subintervalos y usando la fórmula del error:

$$|E_h^T| \leq \frac{(2-1)\left(\frac{2-1}{n}\right)^2}{12} 2 < 0,001$$

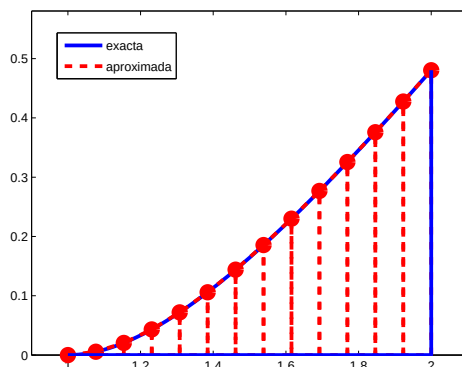


Figura 11: Cálculo de $\int_1^2 \ln^2(x)dx$ usando la fórmula del los trapecios con 13 subintervalos

Y

$$|E_h^T| \leq \frac{2}{12n^2} < 0,001$$

Despejando n :

$$\sqrt{\frac{2000}{12}} < n$$

Es decir $12,9 < n$ y necesitamos $n = 13$ subintervalos para garantizar un error menor que una milésima. (De hecho el valor exacto es 0,1883 y el valor aproximado con $n = 13$ es 0,1887 y vemos que aproximamos de forma exacta tres cifras decimales)

Ejercicio 5.12 1. Encontrar las constantes A_0 , A_1 , x_1 de modo que la fórmula de cuadratura simple:

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq A_0 f(0) + A_1 f(x_1)$$

tenga el grado de precisión más alto posible. ¿Cuál es el grado de precisión? ¿Es una fórmula de Newton-Cotes?

2. Realizar un cambio de variable en la integral

$$\int_0^2 (1 + e^{-x^2})dx$$

para poder utilizar la fórmula obtenida anteriormente y calcular de esa manera una aproximación del valor de dicha integral.

Solución

1. Como hay tres incógnitas, A_0 , A_1 y x_0 , vamos a imponer tres condiciones: que la fórmula sea exacta para $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 1dx &= A_0(1) + A_1(1) \\ \int_0^1 xdx &= A_0(0) + A_1(x_0) \\ \int_0^1 x^2dx &= A_0(0^2) + A_1(x_0^2) \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} 1 &= A_0 + A_1 \\ 1/2 &= A_1 x_0 \\ 1/3 &= A_1 (x_0^2) \end{aligned}$$

Y resolviendo este sistema tenemos que $A_0 = \frac{1}{4}$, $A_1 = \frac{3}{4}$ y $x_0 = \frac{2}{3}$. La fórmula queda:

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{4}f\left(\frac{2}{3}\right)$$

La fórmula no es de Newton-Cotes porque, contando los extremos del intervalo, no tiene los nodos igualmente separados.

Veamos su precisión. Investiguemos si es exacta para $f(x) = x^3$:

$$\int_0^1 x^3 dx \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}(0)^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Y como:

$$\frac{1}{4} \neq \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

el grado de precisión de la fórmula es dos, que no está mal, teniendo en cuenta que la fórmula de los trapecios, con dos nodos, tiene precisión uno.

2. Vamos a hacer un cambio de variable lineal que pase del intervalo $[0, 2]$ a $[0, 1]$.

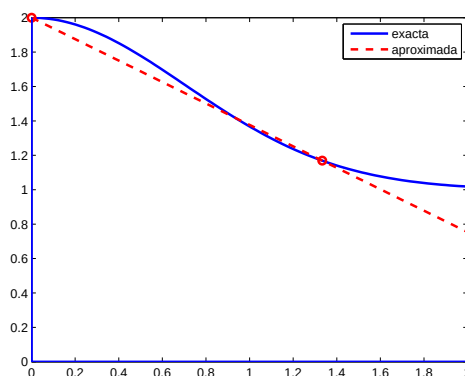


Figura 12: Cálculo de $\int_0^2 (1 + e^{-x^2})dx$ usando la fórmula obtenida

Será de la forma $x = mt + n$:

$$\begin{aligned} \text{Si } x = 0 & \text{ entonces } t = 0 & 0 = n \\ \text{Si } x = 2 & \text{ entonces } t = 1 & 2 = m \end{aligned}$$

con lo que $m = 2$ y $n = 0$ y el cambio de variable es $x = 2t$ y $dx = 2dt$:

$$\int_0^2 (1 + e^{-x^2})dx = \int_0^1 (1 + e^{-(2t)^2})2dt \simeq 2 \left[\frac{1}{4}(1 + e^{-(2(0))^2}) + \frac{3}{4}(1 + e^{-(2(2/3))^2}) \right] = 2,7535$$

Nota: La solución es exacta es 2,8821. Los nodos para el intervalo $[0, 2]$ son $t_0 = 0$ y $t_1 = \frac{4}{3}$.