



Titulación: Grado en Ingeniería
Asignatura: Métodos Numéricos
Autor: César Menéndez

Última actualización: 08/02/2011

Sistemas de Ecuaciones

Planificación:

4.5 Teoría+1,5 Prácticas+6 Lab.

Materiales:

MATLAB

Conocimientos previos:

Conocimientos de Álgebra: valores y vectores propios, normas, sistemas lineales, determinantes, ...



Motivación: Circuito eléctrico

Motivación

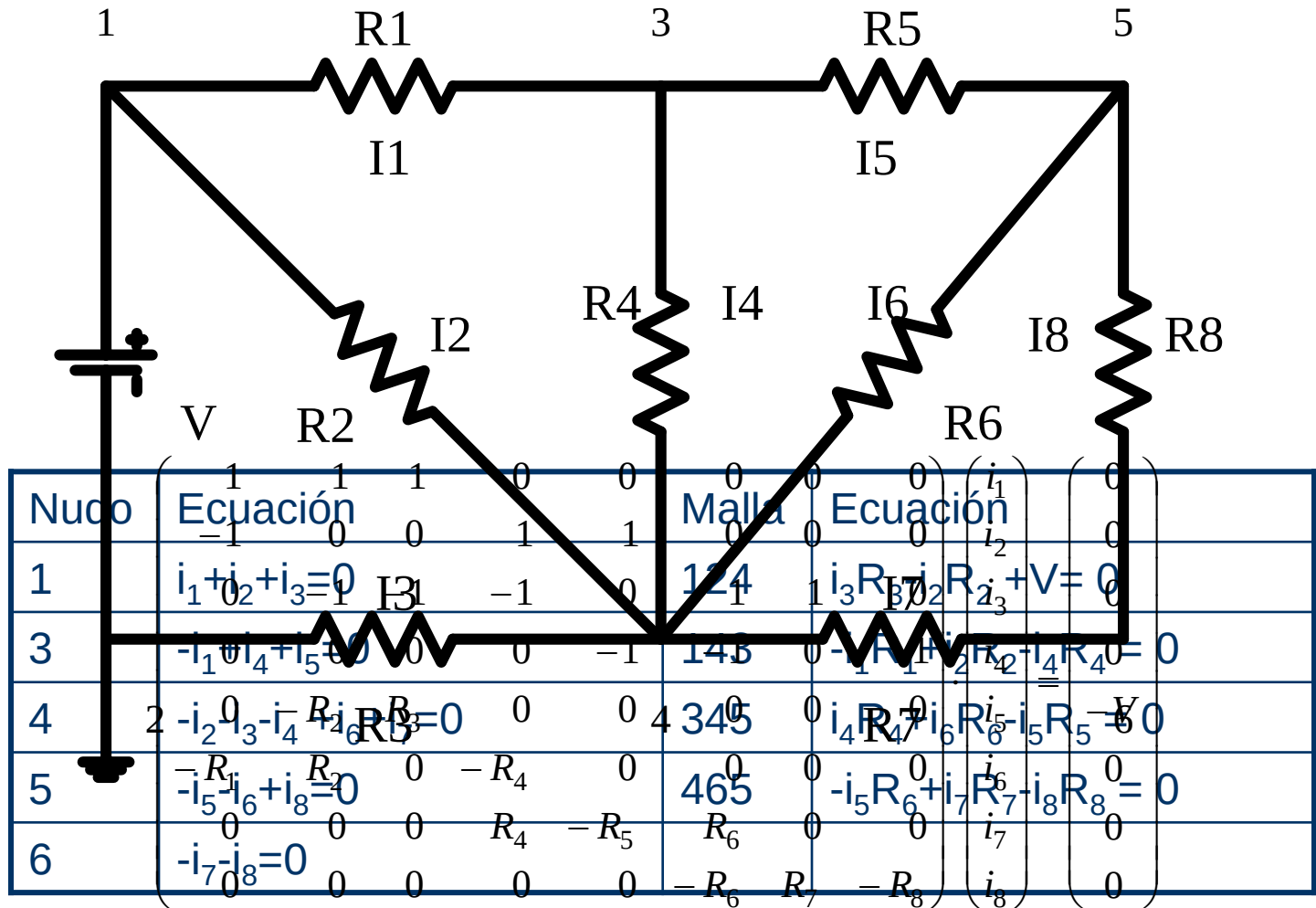
Objetivos

Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

Bibliografía

Software





Objetivos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Distinguir las dos grandes familias de métodos de resolución de sistemas, orígenes, ventajas e inconvenientes
- Entender el significado del **condicionamiento**, aprender a estimarlo y conocer como afecta a los diferentes métodos.
- Utilizar la **eliminación gaussiana** con sus diversas mejoras, así como familiarizarse con la terminología: eliminación progresiva, sustitución regresiva, pivote.
- Conocer el interés de los métodos de **factorización** en el cálculo de determinantes y matrices inversas.
- Saber qué condiciones debe cumplir un algoritmo iterativo para ser **consistente y convergente**.
- Conocer la descomposición matricial que origina los métodos de **Jacobi, Gauss-Seidel y relajación**, entendiendo las ventajas que habitualmente tienen los segundos sobre el primero.
- Interpretar el concepto de **relajación** y su relación con el radio espectral.



Temario

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Cuestiones previas de análisis matricial

Tipos de matrices - Valores propios - Normas vectoriales y

Sistemas lineales: Métodos directos

El método de eliminación de Gauss – Técnicas de pivoteo: parcial, escalado y total - Evaluación del número de operaciones -

Interpretación matricial del método de Gauss - Método de Gauss-Jordan - Factorización matricial: LU, LDL' y LL' -

Condicionamiento de un sistema lineal - Cotas de error -

Aplicaciones al cálculo de la inversa y del determinante de una matriz

Sistemas lineales: Métodos iterativos

Introducción - Sucesiones vectoriales y matriciales - Convergencia de un método iterativo - Velocidad media de convergencia - Test de parada - Métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación - Análisis de la convergencia - Comparación de los métodos directos con los métodos iterativos.

Sistemas no lineales

Introducción – Métodos de punto fijo – Métodos de Newton y casi-Newton – Métodos de descenso.



Definiciones elementales

Sea A un elemento perteneciente al espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n sobre el cuerpo de los complejos: $A \in M_n$

- El polinomio característico se define por
$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
- Los autovalores de A son las raíces del polinomio característico
$$\lambda / \exists x \neq 0 : Ax = \lambda x$$
- El espectro de A es el conjunto de autovalores
$$\sigma(A) = \{\lambda_i / P_A(\lambda_i) = 0\}$$
- Autovector x asociado al valor propio λ es todo vector no nulo verificando
$$(A - \lambda I)x = 0 \leftrightarrow Ax = \lambda x$$
- Radio espectral Radio espectral de A , , es el máximo de sus autovalores, en módulo
$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$
- Traza es la suma de los términos de la diagonal
$$\text{traza}(A) = \text{tr}(A) = \sum \lambda_i = \sum a_i^i$$

Tmas:

- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $|AB| = |BA| = |A| |B|$

➤ Motivación ➤ Objetivos ➤ Temario

➤ Cuestiones previas

- **Sis. Lin. - Directos**
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- **Sis. Lin. - Iterativos**
 - Métodos
- **Sis. no lineales**
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía ➤ Software

Definiciones y Tmas

Normas

Métodos

Representación



Tipos especiales de matrices (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación

Diagonal

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \quad i \neq j \Rightarrow a_i^j = 0$$

Tridiagonal

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \quad |i - j| > 1 \Rightarrow a_i^j = 0$$

Triangular Inf. (Sup)

Hexember Inf. (Sup.)

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \quad i < j \Rightarrow a_i^j = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & a_{n-1}^3 & \cdots & a_{n-1}^n \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \quad i - j > 1 \Rightarrow a_i^j = 0$$



Tipos especiales de matrices (II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación

- Regular: $|A| \neq 0$
- Simétrica: $A=A^T$ Hermítica: $A=A^*$ con $A^*=\text{conj}(A^T)$
- Ortogonal: $A^{-1}=A^T$ Unitaria: $AA^*=A^*A=I \Leftrightarrow A^{-1}=A^*$
- Normal: $AA^T=A^TA$
- Definida positiva (negativa):
 $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_i \in \sigma(A) : \lambda_i > 0$
- Semidefinida positiva (negativa):
 $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n : x^T A x \geq 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_i \in \sigma(A) : \lambda_i \geq 0$
- Semidefinida negativa
 $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n : x^T A x \leq 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_i \in \sigma(A) : \lambda_i \leq 0$
- Definida negativa
 $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n : x^T A x < 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_i \in \sigma(A) : \lambda_i < 0$

Criterio de Sylvester

(Definida positiva)

$$\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^k \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k^1 & a_k^2 & \cdots & a_k^k \end{vmatrix} > 0, k = 1, 2, \dots, n$$



Propiedades

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación

- **T^{ma} :** Si A es una matriz cuadrada, existe una matriz unitaria U tal que la matriz $U^{-1}AU$ es triangular
- **T^{ma} :** Si A es una matriz normal, existe una matriz unitaria U tal que la matriz $U^{-1}AU$ es diagonal
- **T^{ma} :** Si A es una matriz real, existen dos matrices ortogonales U y V tal que la matriz $U^{-1}AV$ es diagonal
- **T^{ma} :** Si A es una matriz simétrica, existe una matriz ortogonal U tal que la matriz $U^{-1}AU$ es diagonal
- **T^{ma} de Rouché-Frobenius** Dado el sistema $Ax=b$
 - Solución única (Compatible determinado) $\Leftrightarrow$
 $\text{rango}(A)=\text{rango}(Ab)=N^{\circ} \text{ incog.}$
 - Infinitas soluciones (Compatible indeterminado) $\Leftrightarrow$
 $\text{rango}(A)=\text{rango}(Ab)<N^{\circ} \text{ incog}$
 - Sin solución única (Incompatible) $\Leftrightarrow$
 $\text{rango}(A)<\text{rango}(Ab)$



Normas vectoriales: definición y ejemplos

Se denomina norma vectorial a toda aplicación de un espacio vectorial en los reales que cumple las condiciones siguientes:

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

- La norma de cualquier vector es mayor o igual que cero y solo se anula cuando el vector es el nulo

$$\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- La norma de un escalar por un vector es igual al valor absoluto del escalar por la norma del vector

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \wedge \forall x \in E$$

- La norma de la suma es menor o igual a la suma de las normas

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$$

Ejemplos en $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación



Normas vectoriales: Normas equivalentes

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación

Dos normas $\|\cdot\|_\alpha$ y $\|\cdot\|_\beta$ son equivalentes cuando existen valores reales λ y μ tales que

$$\lambda \|\mathbf{x}\|_\alpha \leq \|\mathbf{x}\|_\beta \leq \mu \|\mathbf{x}\|_\alpha \quad \forall \mathbf{x} \in E$$

Todas las normas vistas son equivalentes en $\mathbb{R}^n$, es más

$$\bullet \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty \quad \bullet \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty \quad \forall \mathbf{x} \in C^n$$

$$\bullet \frac{1}{n} \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \bullet \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$$

[Demo](#)

- Ejemplo

$$v = (45, -27, 11, -1, 39, 26) \left\{ \begin{array}{l} \|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| = 45 + 27 + 11 + 1 + 39 + 26 = 149 \\ \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} = \sqrt{45^2 + 27^2 + 11^2 + 1^2 + 39^2 + 26^2} = 71.225 \\ \|v\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |v_i| = \sup_{i=1, \dots, n} (45, 27, 11, 1, 39, 26) = 45 \end{array} \right.$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty \rightarrow 45 \leq 149 \leq 6 \times 45$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty \rightarrow 45 \leq 71.225 \leq \sqrt{6} \times 45$$

$$\frac{1}{n} \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_1 \rightarrow \frac{1}{6} 149 \leq 71.225 \leq \sqrt{6} \times 149$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \rightarrow 45 \leq 71.225 \leq 149$$



Normas vectoriales: significado geométrico

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

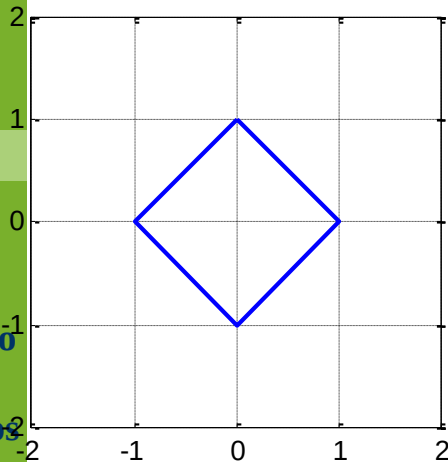
Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación

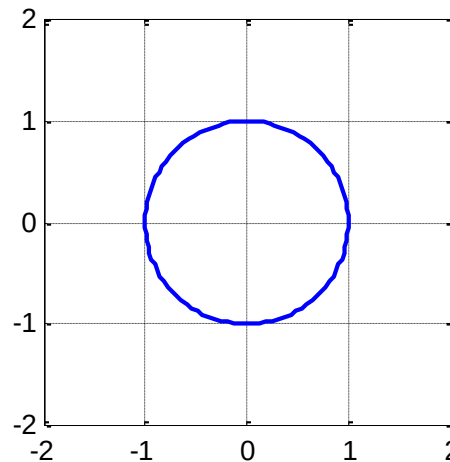
Norma 1



$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x| + |y|$$

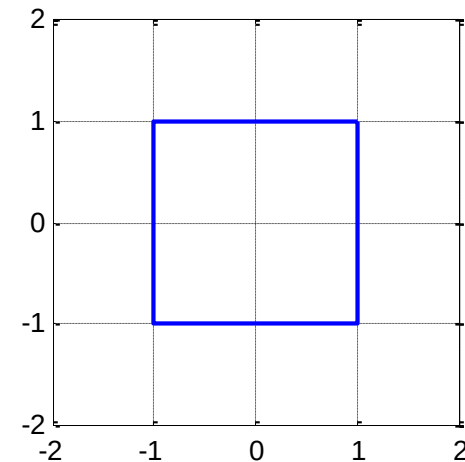
$$\begin{cases} x + y = 1 & x \geq 0 & y \geq 0 \\ -x + y = 1 & x \leq 0 & y \geq 0 \\ -x - y = 1 & x \leq 0 & y \leq 0 \\ x - y = 1 & x \geq 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Norma 2



$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Norma ∞



$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \sup_{i=1,\dots,n} |x_i| = \\ &= \max(|x|, |y|) \end{aligned}$$



Normas matriciales: definición y ejemplos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación

Se denomina norma matricial a toda aplicación del espacio vectorial de las matrices de orden n en los reales que cumple las condiciones siguientes:

$$\|\cdot\| : M_n \rightarrow R_+$$

- La norma de cualquier matriz es mayor o igual que cero y solo se anula cuando la matriz es la nula

$$\|A\| \geq 0 \wedge \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = (0)$$

- La norma de un escalar por una matriz es igual al valor absoluto del escalar por la norma de la matriz

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad \forall \lambda \in K \wedge \forall A \in M_n$$

- La norma de la suma es menor o igual a la suma de las normas

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in M_n$$

- La norma del producto es menor o igual que el producto de las normas

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B \in M_n$$

Ejemplo: Norma de Frobenius

$$\|A\|_E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$$



Normas matriciales subordinadas

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación

Def.: Si $\|x\|$ es una norma vectorial sobre C^n entonces se define una norma matricial sobre el conjunto de las matrices cuadradas de orden n , denominada norma subordinada, mediante

$$\|A\| = \sup_{x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$$

Ejemplos:

$$\bullet \|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|A \cdot x\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_i^j| \quad (\text{máximo de columnas})$$

$$\bullet \|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|A \cdot x\|_2 = \sqrt{\rho(A \cdot A^*)} \quad (\text{radio espectral de la normal})$$

$$\bullet \|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|A \cdot x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_i^j| \quad (\text{máximo de filas})$$

[Demo](#)

Nota: las normas matriciales no verifican
(ver ejemplo siguiente)

$$\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1$$

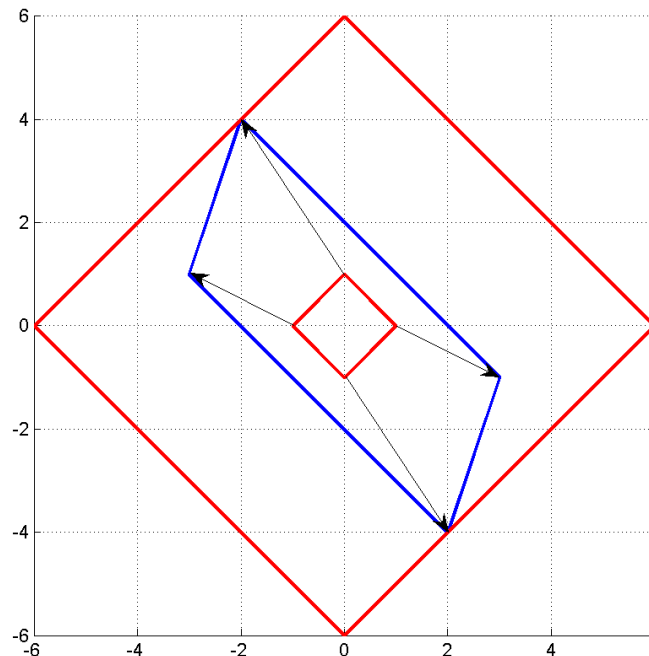


Normas 1: ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \sup_{\|x\|_1=1} \|A \cdot x\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \left\| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \left\| \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ -x + 4y \end{pmatrix} \right\|_1 = \\ &= \sup_{|x|+|y|=1} (|3x - 2y| + |-x + 4y|) \leq \sup_{|x|+|y|=1} (2|x - y| + |x| + |-x + y| + 3|y|) = \\ &= 2 + 0 + 1 + 3 = 6\end{aligned}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_i^j| = \max(\{3 + |-1|\}, \{|-2| + |4|\}) = \max(4, 6) = 6$$



➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación



Normas 2: ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

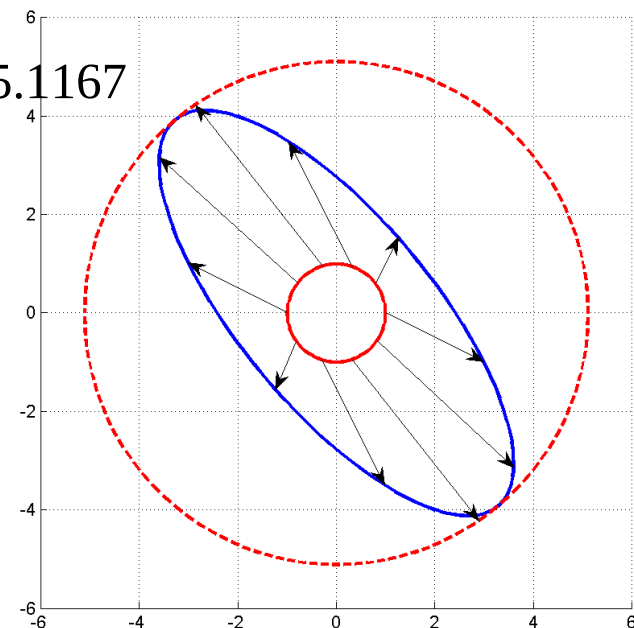
$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \sup_{\|x\|_2=1} \|A \cdot x\|_2 = \sup_{\alpha} \left\| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right\|_2 = \sup_{\alpha} \left\| \begin{pmatrix} 3 \cos \alpha - 2 \sin \alpha \\ -\cos \alpha + 4 \sin \alpha \end{pmatrix} \right\|_2 = \\ &= \sup_{\alpha} \sqrt{(3 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)^2 + (-\cos \alpha + 4 \sin \alpha)^2} = \\ &= \sup_{\alpha} \sqrt{10 + 10 \sin^2 \alpha - 20 \sin \alpha \cos \alpha} = \sup_{\alpha} \sqrt{10 + 10 \sin^2 \alpha - 10 \sin 2\alpha} = \\ &= 5.1167 \end{aligned}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A \cdot A^*)} = \sqrt{26.1803} = 5.1167$$

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ -11 & 17 \end{pmatrix}$$

$$P_x(A \cdot A^*) = x^2 - 30x + 100$$

$$\sigma(A \cdot A^*) = \{3.8197, 26.1803\}$$



➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación

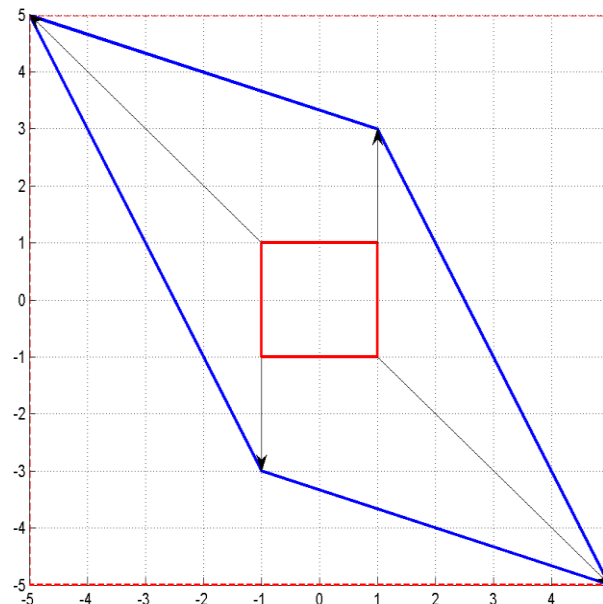


Normas infinito: ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_{\infty} &= \sup_{\|x\|_{\infty}=1} \|A \cdot x\|_{\infty} = \sup_{\|x\|_{\infty}=1} \left\| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \sup_{\|x\|_{\infty}=1} \left\| \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ -x + 4y \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \\ &= \sup_{\max\{|x|, |y|\}=1} (|3x - 2y|, |-x + 4y|) \leq \sup_{\max\{|x|, |y|\}=1} (5, 5) = 5 \end{aligned}$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_i^j| = \max(\{3 + |-2|\}, \{|-1| + |4|\}) = \max(5, 5) = 5$$



$$\begin{cases} \|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|A \cdot x\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_i^j| = 6 \\ \|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|A \cdot x\|_2 = \sqrt{\rho(A \cdot A^*)} = 5.1167 \\ \|A\|_{\infty} = \sup_{\|x\|_{\infty}=1} \|A \cdot x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_i^j| = 5 \end{cases}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación



Clasificación de los métodos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación

- Métodos directos
 - Convierten el sistema inicial en otro u otros equivalentes, pero más simples de resolver
 - Operaciones de equivalencia
 - Multiplicar una ecuación por un escalar
 - Intercambiar el orden de dos ecuaciones
 - Sumar una ecuación a otra
 - Obtienen la solución “exacta” en un número finito de pasos (dependen sólo del orden del sistema)
- Métodos iterativos
 - Transforman el sistema inicial para poder aplicar punto fijo
 - El número de pasos para obtener la solución “aproximada” depende del error admisible



Representación matricial

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Normas

Métodos

Representación

$$\left. \begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + a_1^4 x_4 + \cdots a_1^n x_n &= b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + a_2^4 x_4 + \cdots a_2^n x_n &= b_2 \\ a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3 + a_3^4 x_4 + \cdots a_3^n x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + a_n^3 x_3 + a_n^4 x_4 + \cdots a_n^n x_n &= b_n \end{aligned} \right\}$$

Sistema de Ecuaciones

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Representación Matricial

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n & b_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n & b_n \end{array} \right)$$

Matriz Ampliada



Método de Cramer

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \rightarrow x_k = \frac{|\mathbf{A}_k|}{|\mathbf{A}|}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^k & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^k & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^k & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^k & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \quad |\mathbf{A}_k| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & b_1 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & b_2 & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & b_3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & b_n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

• Cálculo del determinante

$$|\mathbf{A}| = a_1^1 A_1^{n-1} - a_2^1 A_2^{n-1} + a_3^1 A_3^{n-1} + \cdots + (-1)^{n+1} a_n^1 A_n^{n-1} \quad A_1^{n-1} = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \quad A_2^{n-1} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

• Operaciones

- n+1 determinantes de orden n con n cocientes
- Cada uno genera n determinantes de orden n-1 junto con (n-1) sumas y n productos

• Total

- Productos: (n+1)!
- Sumas n!



Sistemas "más simples": Diagonales y triangulares

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_1^1} \\ x_2 = \frac{b_2}{a_2^2} \\ x_3 = \frac{b_3}{a_3^3} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n}{a_n^n} \end{cases}$$

- Operaciones: $n \div$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_1^1} b_1 \\ x_2 = \frac{1}{a_2^2} (b_2 - a_2^1 x_1) \\ x_3 = \frac{1}{a_3^3} (b_3 - a_3^1 x_1 - a_3^2 x_2) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_n^n} \left(b_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_n^k x_k \right) \end{cases}$$

- Operaciones:

- $n \div$
- $\frac{1}{2}n(n-1) \times$
- $\frac{1}{2}n(n-1) +$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2}^{n-2} & a_{n-2}^{n-1} & a_{n-2}^n \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{n-1} & a_{n-1}^n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_n = \frac{1}{a_n^n} b_n \\ x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}^{n-1}} (b_{n-1} - a_{n-1}^n x_n) \\ x_{n-2} = \frac{1}{a_{n-2}^{n-2}} (b_{n-2} - a_{n-2}^{n-1} x_{n-1} - a_{n-2}^n x_n) \\ \vdots \\ x_i = \frac{1}{a_i^i} \left(b_i - \sum_{k=i+1}^n a_i^k x_k \right) \end{cases}$$

- Inferior:
descenso

- Superior:
remonte



Método de Gauss

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- *Método de Gauss*

- *Técnicas de pivoteo*

- *Gauss-Jordan*

- El sistema equivalente es triangular superior
- Opera para anular los coeficientes por debajo de la diagonal
 - Anular el elemento de la fila j -ésima bajo la primera diagonal

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n & b_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_j^1 & a_j^2 & a_j^3 & \cdots & a_j^n & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n & b_n \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{a_j^1}{a_1^1} \\ j^a \leftarrow j^a + m \times 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n & b_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \bar{a}_j^2 & \bar{a}_j^3 & \cdots & \bar{a}_j^n & \bar{b}_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n & b_n \end{array} \right)$$

- Operaciones: 1 cociente, n productos y n sumas para $(n-1)$ filas

- Anular el elemento de la fila j -ésima bajo la diagonal i -ésima

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & \cdots & a_1^{i-1} & a_1^i & \cdots & a_1^n & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i-1}^{i-1} & a_{i-1}^i & \cdots & a_{i-1}^n & b_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_i^i & \cdots & a_i^n & b_i \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i+1}^i & \cdots & a_{i+1}^n & b_{i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_j^i & \cdots & a_j^n & b_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^i & \cdots & a_n^n & b_n \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{a_j^i}{a_i^i} \\ j^a \leftarrow j^a + m \times i^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & \cdots & a_1^{i-1} & a_1^i & \cdots & a_1^n & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i-1}^{i-1} & a_{i-1}^i & \cdots & a_{i-1}^n & b_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_i^i & \cdots & a_i^n & b_i \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i+1}^i & \cdots & a_{i+1}^n & b_{i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_j^n & \bar{b}_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^i & \cdots & a_n^n & b_n \end{array} \right)$$

- Operaciones: 1 cociente, $n-i$ productos y $n-i$ sumas para $(n-i-1)$ filas



Operaciones

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- *Método de Gauss*

- *Técnicas de pivoteo*

- *Gauss-Jordan*

- Convertir el sistema en triangular

$$\div \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 1 = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$+, \times \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$$

- Resolución de un sistema triangular

$$\div \quad n$$

$$+, \times \quad \frac{n^2 - n}{2}$$

- Total

$$\div \quad \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2} = O\left(\frac{n^2}{2}\right)$$

$$+, \times \quad \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^3 - n}{3} = O\left(\frac{n^3}{3}\right)$$

- Un sistema de orden 9 requiere 240 productos
- Un sistema de orden 100 requiere 333.300 productos



Ejemplo del método de Gauss

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- *Método de Gauss*

- *Técnicas de pivoteo*

- *Gauss-Jordan*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ 2^a - \frac{-1}{2} 1^a \\ 3^a - \frac{-1}{2} 1^a \\ 4^a - \frac{-2}{2} 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & -\frac{35}{2} \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & -4 & -\frac{17}{2} \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{19}{3} & -\frac{43}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & 13 & \frac{31}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ = \\ = \\ 4^a - \frac{21}{\frac{5}{3}} 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{19}{3} & -\frac{43}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{529}{10} & \frac{529}{5} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{(-15 - (4x_2 + 1x_3 - 4x_4))}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{(-\frac{35}{2} - (-\frac{5}{2}x_3 - 7x_4))}{3} = -2 \\ x_3 = \frac{(-\frac{43}{3} - (-\frac{19}{3}x_4))}{\frac{5}{3}} = -1 \\ x_4 = 2 \end{array} \right.$$



Justificación

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Método de Gauss

- Técnicas de pivoteo

- Gauss-Jordan

- Se denomina pivote al término de la diagonal que anula las columnas
- Debido a los errores inherentes a la representación limitada de un número en el ordenador, es conveniente no dividir por números "pequeños". Interesa que el pivote sea (en valor absoluto) muy alto para disminuir la propagación de errores en la división.

• Ejemplo:

$$\begin{cases} 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ 5.291x_1 - 6.13x_2 = 46.78 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Resolución con 4 cifras decimales

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \rightarrow \left\{ m = \frac{5.291}{0.003} = 1763.\hat{6} \approx 1764 \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0.003x_1 = 59.17 - 59.2 \rightarrow x_1 = -10 \\ x_2 \approx 1.001 \rightarrow 59.14 \times 1.001 \approx 59.2 \end{cases}$$

Resolución con 4 cifras decimales e intercambio de filas

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & 59.17 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ m = \frac{-0.003}{5.291} \approx -5.670 \cdot 10^{-4} \right\} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0 & 59.14 & 59.14 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 5.291x_1 = 46.78 + 6.13 \rightarrow x_1 = 10 \\ x_2 \approx 1.000 \rightarrow -6.13 \times 1.000 \approx -6.13 \end{cases}$$



Algoritmo de Gauss y modificaciones

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- *Método de Gauss*

- *Técnicas de pivoteo*

- *Gauss-Jordan*

- ENTRADA: Matriz ampliada A
- SALIDA: Solución x , o mensaje de indeterminación
- ALGORITMO
 1. Repetir para todas las filas {Proceso de triangularización}
 2. Encontrar el pivote y su fila
 3. Si el pivote es nulo PARAR 'No existe solución única'
 4. Si la fila/columna actual no es la del pivote, intercambiarlas
 5. Repetir desde la fila actual hasta la ultima
 6. Calcular el coeficiente m
 7. Anular el elemento combinando ambas filas
 8. Resolver el sistema triangular resultante (Sustitución regresiva)



Técnicas de pivoteo (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Método de Gauss

- Técnicas de pivoteo

- Gauss-Jordan

Pivote simple:

Algoritmo

Se intercambian filas para tomar como pivote el mayor término en valor absoluto de la columna bajo la diagonal

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{swap rows 1 and 2}} \begin{pmatrix} -5 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pivote doble:

Algoritmo

Se intercambian filas y columnas para tomar como pivote el mayor término en valor absoluto de la submatriz

Se altera el orden de las soluciones)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{swap rows 1 and 2} \\ \text{swap columns 1 and 3} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Pivote escalado:

Algoritmo

Actúa como el pivote simple pero tomando como término de comparación el valor ponderado de la columna, esto es, dividido entre el máximo de la fila

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scale columns}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/6 \\ 3/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



Técnicas de pivoteo: justificación práctica

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Método de Gauss

- Técnicas de pivoteo

- Gauss-Jordan

Sistema:
$$\begin{cases} (0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17) \times 10^4 \\ 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{cases} \quad (\text{resolución con 4 cifras})$$

Pivote simple
$$\left(\begin{array}{cc|c} 30 & 591400 & 591700 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x_1 = -10 \\ x_2 \approx 1.001 \end{cases}$$

Pivote escalado
$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{30}{\max(30, 591400)} \approx 5.073 \cdot 10^{-5} \\ p_2 = \frac{5.291}{\max(5.291, 6.13)} \approx 0.863 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x_1 = 10 \\ x_2 \approx 1.000 \end{cases}$$

Sistema:
$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 37 \\ x_1 + 5x_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad (\text{resolución con 4 cifras})$$

Pivote simple
$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 37 \\ 1 & 5 & 15 \end{array} \right) \rightarrow \{m = -0.3333\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 37 \\ 0 & 2.667 & 2.67 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x_1 = 9.997 \\ x_2 \approx 1.001 \end{cases}$$

Pivote doble
$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 37 \\ 5 & 1 & 15 \end{array} \right) \rightarrow \{m = -0.7143\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 37 \\ 0 & -1.143 & -11.43 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x_2 = 1.00 \\ x_1 \approx 10.00 \end{cases}$$



Matriz singular

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Método de Gauss

- Técnicas de pivoteo

- Gauss-Jordan

- Sistema compatible indeterminado o incompatible $\Rightarrow$ No hay solución única
- $\text{rango}(A) < N^{\circ}$ incógnitas
- El pivote se anula

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{matrix} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} = \\ 2^a - (2)1^a \\ 3^a - (3)1^a \\ 4^a - (-1)1^a \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ -7 \\ -15 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{matrix} = \\ = \\ 3^a - (4)2^a \\ 4^a - (-3)2^a \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{matrix}$$



Ejemplo: Gauss sin pivote (4 dígitos)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Método de Gauss

- Técnicas de pivoteo

- Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ 2^a - \frac{-1}{2} 1^a \\ 3^a - \frac{-1}{2} 1^a \\ 4^a - \frac{-2}{2} 1^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & -1 & 2.5 & -4 & -8.5 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ = \\ 3^a - \frac{-1}{3} 2^a \\ 4^a - \frac{9}{3} 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & 2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & 0 & 1.667 & -6.333 & -14.33 \\ 0 & 0 & 10.5 & 13 & 15.5 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ = \\ = \\ 4^a - \frac{10.5}{1.667} 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & 2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & 0 & 1.667 & -6.333 & -14.33 \\ 0 & 0 & 0 & 52.89 & 105.8 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}(-15 - 4x_2 - 1x_3 + 4x_4) \\ x_2 = \frac{1}{3}(-17.5 - 2.5x_3 - 7x_4) \\ x_3 = \frac{1}{1.667}(-14.33 + 6.333x_4) \\ x_4 = \frac{105.8}{52.89} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0.99 \\ x_2 = -1.997 \\ x_3 = -0.9958 \\ x_4 = 2 \end{array} \right.$$



Ejemplo: Gauss pivote simple (4 dígitos)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Método de Gauss

- Técnicas de pivoteo

- Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ 2^a - \frac{-1}{2}1^a \\ 3^a - \frac{-1}{2}1^a \\ 4^a - \frac{-2}{2}1^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & -1 & 2.5 & -4 & -8.5 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow[4^a]{2^a} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & -1 & 2.5 & -4 & -8.5 \\ 0 & 3 & -2.5 & -7 & -17.5 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ = \\ 3^a - \frac{-1}{9}2^a \\ 4^a - \frac{-3}{9}2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & 2.833 & -4.889 & -12.61 \\ 0 & 0 & -3.5 & -4.334 & -5.170 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow[4^a]{3^a} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & -3.5 & -4.889 & -12.61 \\ 0 & 0 & 2.833 & -4.889 & -12.61 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ = \\ = \\ 4^a - \frac{2.833}{-3.5}3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & -3.5 & -4.334 & -5.170 \\ 0 & 0 & 0 & -8.397 & -16.79 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}(-15 - 4x_2 - 1x_3 + 4x_4) \\ x_2 = \frac{1}{9}(-37 - 3x_3 + 8x_4) \\ x_3 = \frac{1}{-3.5}(-5.17 + -4.334x_4) \\ x_4 = \frac{-16.79}{-8.397} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -0.9994 \\ x_4 = 2 \end{array} \right.$$



Ejemplo: Gauss pivote doble (4 dígitos)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Método de Gauss

- Técnicas de pivoteo

- Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F:1^a \leftrightarrow 4^a \\ C:1^a \leftrightarrow 2^a \\ [2,1,3,4]}} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 2 & -4 & -22 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & -10 \\ -3 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & -4 & -15 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4^a - \frac{2}{5} J_5 \\ 3^a - \frac{2}{-3} J_5 \\ 5^a - \frac{2}{1} J_5 \\ = \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3^a & -0^a & -0^a & -5^a \\ 0 & -5^a & 3^a & -4^a & -14^a \\ 0 & -0^a & -3^a & -4^a & -2^a \\ 2 & -5 & 5 & -4 & -55 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{[5^a, 3^a, 1] \\ C:5^a \leftrightarrow 4^a \\ E:5^a \leftrightarrow 3^a}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -0^a & -0^a & 3^a & -5^a \\ 0 & -4^a & -3^a & -0^a & -2^a \\ 0 & -4^a & 3^a & -5^a & -14^a \\ 2 & -4 & 5 & -5 & -55 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ = \\ 3^a - \frac{4.2}{4.4} 2^a \\ 4^a - \frac{0.8}{4.4} 2^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -4 & 2 & -2 & -22 \\ 0 & -4.4 & 3.2 & -2.2 & -14.2 \\ 0 & 0 & -6.454 & 1.5 & 7.95 \\ 0 & 0 & -1.182 & 4 & 5.182 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ = \\ = \\ 4^a - \frac{1.182}{6.454} 3^a \end{array} \right\} \xrightarrow{[2,4,3,1]} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -4 & 2 & -2 & -22 \\ 0 & -4.4 & 3.2 & -2.2 & -14.2 \\ 0 & 0 & -6.454 & 1.5 & 7.95 \\ 0 & 0 & 0 & 3.725 & 3.726 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{5}(-22 + 4x_4 - 2x_3 + 2x_1) \\ x_4 = \frac{1}{-4.4}(-14.2 - 3.2x_3 + 2.2x_1) \\ x_3 = \frac{1}{-6.454}(7.95 - 1.5x_1) \\ x_1 = \frac{3.726}{3.725} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -0.9994 \\ x_4 = 2 \end{array} \right.$$



Ejemplo: Gauss pivote escalado (4 dígitos)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Método de Gauss

- Técnicas de pivoteo

- Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{bmatrix} \frac{2}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}} \left\{ \begin{array}{l} = \\ 2^a + 0.5 \times 1^a \\ 3^a + 0.5 \times 1^a \\ 4^a + 1 \times 1^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & -1 & 2.5 & -4 & -8.5 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} \frac{3}{7} \approx 0.4286 \\ \frac{1}{4} = 0.25 \\ \frac{9}{9} = 1 \\ 2^0 \leftrightarrow 4^a \end{bmatrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & -4 & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & -\frac{35}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ = \\ 3^a - \frac{-1}{9} 2^a \\ 4^a - \frac{3}{9} 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & 2.833 & -4.889 & -12.61 \\ 0 & 0 & 3.5 & -4.334 & -5.17 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} \frac{2.833}{4.889} \approx 0.5795 \\ \frac{3.5}{4.334} = 0.8076 \\ 3^0 \leftrightarrow 4^a \end{bmatrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & 3.5 & -4.334 & -5.17 \\ 0 & 0 & 2.833 & -4.889 & -12.61 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ = \\ = \\ 4^a - \frac{2.833}{3.5} 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & 2.833 & -4.889 & -12.61 \\ 0 & 0 & 0 & -8.397 & -16.79 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}(-15 - 4x_2 - 1x_3 + 4x_4) \\ x_2 = \frac{1}{9}(-37 - 3x_3 + 8x_4) \\ x_3 = \frac{1}{2.833}(-12.61 + 4.889x_4) \\ x_4 = \frac{-16.79}{-8.397} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -0.9994 \\ x_4 = 2 \end{array} \right.$$



Método de Gauss-Jordan

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Método de Gauss

- Técnicas de pivoteo

- Gauss-Jordan

- El sistema equivalente es diagonal
- Opera para anular los coeficientes por encima y por debajo de la diagonal
 - Anular el elemento de la fila j -ésima bajo la diagonal i -ésima

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_1^1 & \cdots & 0 & a_1^i & \cdots & a_1^n & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i-1}^{i-1} & a_{i-1}^i & \cdots & a_{i-1}^n & b_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_i^i & \cdots & a_i^n & b_i \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i+1}^i & \cdots & a_{i+1}^n & b_{i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_j^i & \cdots & a_j^n & b_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^i & \cdots & a_n^n & b_n \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{a_j^i}{a_i^i} \\ j^a \leftarrow j^a + m \times i^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} a_1^1 & \cdots & 0 & a_1^i & \cdots & a_1^n & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i-1}^{i-1} & a_{i-1}^i & \cdots & a_{i-1}^n & b_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_i^i & \cdots & a_i^n & b_i \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i+1}^i & \cdots & a_{i+1}^n & b_{i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_j^n & \bar{b}_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^i & \cdots & a_n^n & b_n \end{array} \right)$$

- Operaciones: 1 cociente, $n-i$ productos y $n-i$ sumas para $(n-1)$ filas
- Total de operaciones

$$\div \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 1 + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\times, + \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} (n-i) = \frac{n(n-1)^2}{2} = \frac{n^3 - 2n^2 + n}{2}$$

- Un sistema de 9(100) ecuaciones requiere 288 (490.000) productos



Ejemplo: Gauss-Jordan

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Método de Gauss

- Técnicas de pivoteo

- Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \\ 2^a - \frac{-1}{2} 1^a \\ 3^a - \frac{-1}{2} 1^a \\ 4^a - \frac{-2}{2} 1^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & -17.5 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & -4 & -8.5 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^a - \frac{4}{3} 2^a \\ = \\ 3^a - \frac{-1}{3} 2^a \\ 4^a - \frac{9}{3} 2^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4.333 & 5.331 & 8.333 \\ 0 & 3 & -2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & 0 & 1.667 & -6.333 & -14.33 \\ 0 & 0 & 10.5 & 13 & 15.5 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^a - \frac{4.333}{1.667} 3^a \\ 2^a - \frac{-2.5}{1.667} 3^a \\ = \\ 4^a - \frac{10.5}{1.667} 3^a \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 21.79 & 45.57 \\ 0 & 3 & 0 & 16.5 & -39 \\ 0 & 0 & 1.667 & -6.333 & -14.33 \\ 0 & 0 & 0 & 52.89 & 105.8 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^a - \frac{21.79}{52.89} 4^a \\ 2^a - \frac{16.5}{52.89} 4^a \\ 3^a - \frac{-6.333}{52.89} 4^a \\ = \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 1.98 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -5.99 \\ 0 & 0 & 1.667 & 0 & -1.67 \\ 0 & 0 & 0 & 52.89 & 105.8 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.99 \\ x_2 = -1.997 \\ x_3 = -1.002 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$



Intrepretación matricial de Gauss sin pivoteo

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Interpretación matriz.

- Teoremas

- Doolittle (regular)

- Crout (simétrica)

- Choleski (definida+)

- Comparación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-a_1^1}{a_1^1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-a_1^2}{a_1^1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-a_1^n}{a_1^1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ 0 & \bar{a}_2^2 & \bar{a}_2^3 & \cdots & \bar{a}_2^n \\ 0 & \bar{a}_3^2 & \bar{a}_3^3 & \cdots & \bar{a}_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bar{a}_n^2 & \bar{a}_n^3 & \cdots & \bar{a}_n^n \end{pmatrix} \leftrightarrow L_1 A = U_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{-\bar{a}_3^2}{\bar{a}_2^2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{-\bar{a}_n^2}{\bar{a}_2^2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ 0 & \bar{a}_2^2 & \bar{a}_2^3 & \cdots & \bar{a}_2^n \\ 0 & \bar{a}_3^2 & \bar{a}_3^3 & \cdots & \bar{a}_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bar{a}_n^2 & \bar{a}_n^3 & \cdots & \bar{a}_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ 0 & \bar{a}_2^2 & \bar{a}_2^3 & \cdots & \bar{a}_2^n \\ 0 & 0 & \tilde{a}_3^3 & \cdots & \tilde{a}_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_n^3 & \cdots & \tilde{a}_n^n \end{pmatrix} \leftrightarrow L_2 U_1 = U_2$$

$$L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_2 L_1 A = U_n$$

- **Tma:** Las matrices verifican L_k verifican $(L_k)^{-1} = 2I - L_k$

[Demo](#)



Interpretación matricial del intercambio de filas y columnas

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Interpretación matriz.

- Teoremas

- Doolittle (regular)

- Crout (simétrica)

- Choleski (definida+)

- Comparación

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Fila/Columna: } 1 \leftrightarrow 2]{\text{Intercambio}} M_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_1^2 A = \begin{pmatrix} a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \\ AM_1^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1^1 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^2 & a_2^1 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^2 & a_3^1 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^2 & a_n^1 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Propiedades: $M_i^j M_k^l = M_{ij}^{kl} \quad M_{i \dots j}^{k \dots l} = M \rightarrow M^{-1} = M^T$



Factorización

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Interpretación matriz.

- Teoremas

- Doolittle (regular)

- Crout (simétrica)

- Choleski (definida+)

- Comparación

- **T^{ma}:** El producto de matrices triangulares inferiores (superiores) es una matriz triangular inferior (superior)
- **T^{ma}:** La inversa de una matriz triangular inferior (superior) es una matriz triangular inferior (superior)

[Demo](#)
[Demo](#)

$$L_{n-1}L_{n-2} \cdots L_2L_1A = U_n \rightarrow \bar{L}A = U \rightarrow A = \bar{L}^{-1}U = LU$$

- Doodlitle (Matrices regulares): $A = L \times U$

- L es triangular inferior con diagonal unitaria

- U es triangular superior

$$L \cdot U \cdot x = b \Rightarrow \begin{cases} L \cdot y = b \\ U \cdot x = y \end{cases}$$

- Crout (Matrices simétricas): $A = L \times D \times L^T$

- L es triangular inferior con diagonal unitaria

- D es diagonal

$$L \cdot D \cdot L^T \cdot x = b \Rightarrow \begin{cases} L \cdot y = b \\ D \cdot z = y \\ L^T \cdot x = z \end{cases}$$

- Choleski (Matrices definidas positivas): $A = L \times L^T$

- L es triangular inferior con diagonal de términos positivos
no necesariamente unitarios

$$L \cdot L^T \cdot x = b \Rightarrow \begin{cases} L \cdot y = b \\ L^T \cdot x = y \end{cases}$$



Factorización de Doodlitle: $(L \times U)x = Mb$

Factorización directa

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_n^1 & l_n^2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & u_1^n \\ 0 & u_2^2 & \cdots & u_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_n^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & u_1^{n-1} & u_1^n \\ l_2^1 u_1^1 & l_2^1 u_1^2 + u_2^2 & \cdots & l_2^1 u_1^{n-1} + u_2^{n-1} & l_2^1 u_1^n + u_2^n \\ l_3^1 u_1^1 & l_3^1 u_1^2 + l_3^2 u_2^2 & \cdots & \sum_{k=1}^2 l_3^k u_k^{n-1} + u_3^{n-1} & \sum_{k=1}^2 l_3^k u_k^n + u_3^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_n^1 u_1^1 & \sum_{k=1}^1 l_n^k u_k^n + l_n^2 u_2^2 & \cdots & \sum_{k=1}^{n-2} l_n^k u_k^n + l_n^{k-1} u_{k-1}^{k-1} & \sum_{k=1}^{n-1} l_n^k u_k^2 + u_n^n \end{pmatrix}$$

Algoritmo

Ejemplo (4 cifras)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0'3333 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2'667 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0'3333 & 1 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 37 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow y = \begin{pmatrix} 37 \\ 2'67 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2'667 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 37 \\ 2'67 \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 9'997 \\ 1'001 \end{pmatrix} \end{cases}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Interpretación matriz.

- Teoremas

- Doolittle (regular)

- Crout (simétrica)

- Choleski (definida+)

- Comparación



Factorización de Crout: $(L \times D \times L^T)Mx = Mb$

Factorización directa

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_n^1 & l_n^2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_2^1 & \cdots & l_n^1 \\ 0 & 1 & \cdots & l_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^1 l_2^1 & d_1^1 l_3^1 & \cdots & d_1^1 l_n^1 \\ (l_2^1)^2 d_1^1 + d_2^2 & l_2^1 d_1^1 l_3^1 + d_2^2 l_3^2 & \cdots & l_2^1 d_1^1 l_n^1 + d_2^2 l_n^2 \\ \sum_{k=1}^2 (l_3^k)^2 d_k^k + d_3^3 & \cdots & \sum_{k=1}^2 l_3^k d_k^k l_n^k + d_3^3 l_n^3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} (l_n^k)^2 d_k^k + d_n^n \end{pmatrix}$$

Algoritmo

Ejemplo (4 cifras) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 75 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2'333 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -11'33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2'333 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2'333 & 1 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 37 \\ 75 \end{pmatrix} \rightarrow y = \begin{pmatrix} 37 \\ -11'32 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -11'33 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} 37 \\ -11'32 \end{pmatrix} \rightarrow z = \begin{pmatrix} 12'33 \\ 0'9991 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2'333 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 12'33 \\ 0'9991 \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 9'999 \\ 0'9991 \end{pmatrix} \end{cases}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
- Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Interpretación matriz.
- Teoremas
- Doolittle (regular)
- **Crout (simétrica)**
- Choleski (definida+)
- Comparación



Factorización de Choleski: $(L \times L^T)x = b$

Factorización directa

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2^1 & l_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_n^1 & l_n^2 & \cdots & l_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1^1 & l_2^1 & \cdots & l_n^1 \\ 0 & l_2^2 & \cdots & l_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_n^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (l_1^1)^2 & l_1^1 l_2^1 & l_1^1 l_3^1 & \cdots & l_1^1 l_n^1 \\ (l_2^1)^2 + (l_2^2)^2 & l_2^1 l_3^1 + l_2^2 l_3^2 & \cdots & l_2^1 l_n^1 + l_2^2 l_n^2 \\ \sum_{k=1}^2 (l_3^k)^2 + (l_3^3)^2 & \cdots & \sum_{k=1}^2 l_3^k l_n^k + l_3^3 l_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} (l_n^k)^2 + (l_n^n)^2 \end{pmatrix}$$

Algoritmo

Ejemplo (4 cifras)

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2'646 & \\ -0'3779 & 3'586 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2'646 & -0'3779 \\ & 3'586 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 2'646 & \\ -0'3779 & 3'586 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 69 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow y = \begin{pmatrix} 26'08 \\ 3'586 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2'646 & -0'3779 \\ & 3'586 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 26'08 \\ 3'586 \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Interpretación matriz.

- Teoremas

- Doolittle (regular)

- Crout (simétrica)

- Choleski (definida+)

- Comparación



Operaciones

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Interpretación matriz.

- Teoremas

- Doolittle (regular)

- Crout (simétrica)

- Choleski (definida+)

- Comparación

	Sumas	Productos	Cocientes
Cramer	$O(n!)$	$O(n+1!)$	$O(n)$
Gauss	$\frac{1}{3}O(n^3)$	$\frac{1}{3}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^2)$
G-Jordan	$\frac{1}{2}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^2)$
Doolittle	$\frac{1}{2}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^2)$
Crout	$\frac{1}{3}O(n^3)$	$\frac{2}{3}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^2)$
Choleski	$\frac{1}{3}O(n^3)$	$\frac{1}{3}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^2)$



Ejemplo de condicionamiento

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización

➤ Condicionamiento

- Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Motivación
- Interpretación
- Acotación
- Propiedades
- Ejemplo

Sistema inicial:

$$Ax=b$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Resolvemos sistema "equivalente":
 $Cx'=d$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x' = x + \delta x$ ¿ $\delta x \rightarrow 0$?
 ¿ $A \propto C$?

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b})$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + \delta x_1 \\ x_2 + \delta x_2 \\ x_3 + \delta x_3 \\ x_4 + \delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32'1 \\ 22'9 \\ 33'1 \\ 30'9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Residuo:

$$R = Ax' - b = A\delta x$$

$$(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

!No es una buena referencia de la bondad de la solución!

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8'1 & 7'2 \\ 7'08 & 5'04 & 6 & 5 \\ 8 & 5'98 & 9'89 & 9 \\ 6'99 & 4'99 & 9 & 9'98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + \delta x_1 \\ x_2 + \delta x_2 \\ x_3 + \delta x_3 \\ x_4 + \delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$



Interpretación geométrica

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

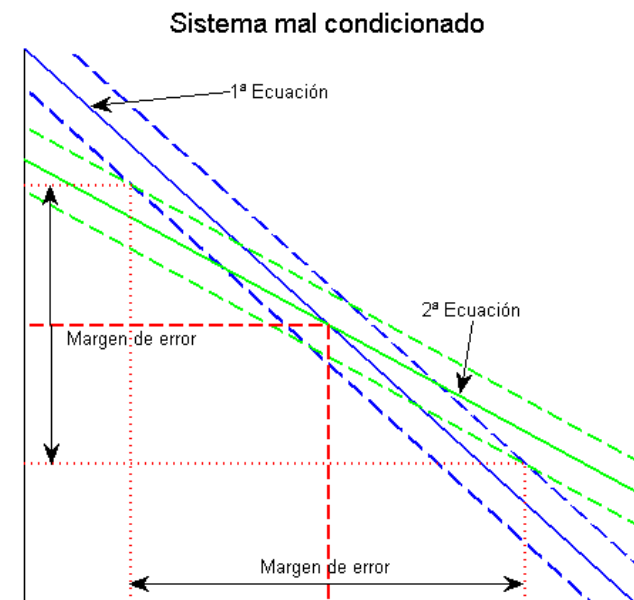
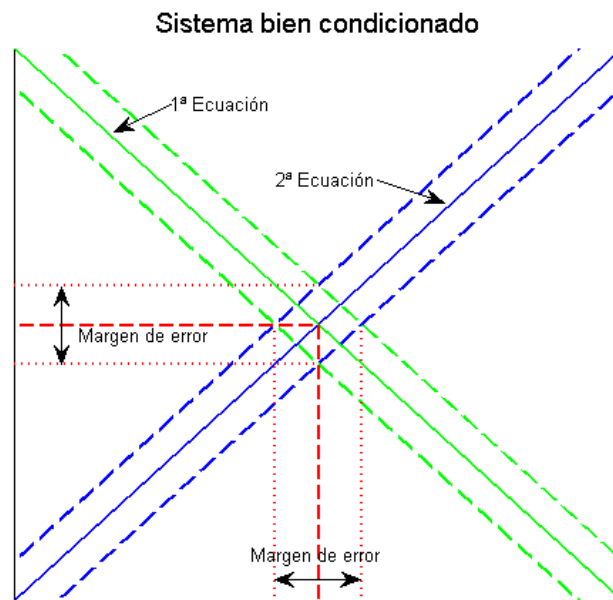
- Motivación

- **Interpretación**

- Acotación

- Propiedades

- Ejemplo





Acotación

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
- Condicionamiento
- Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Motivación
- Interpretación
- **Acotación**
- Propiedades
- Ejemplo

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{b}\| \\ \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \rightarrow \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|} \leq \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{b} \rightarrow \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|} \leq \|\delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta \mathbf{b}\|$$

$$\frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|} \cdot \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \cdot \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{A})} \cdot \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \|\delta \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| < 1 & \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\text{cond}(\mathbf{A})}{1 - \text{cond}(\mathbf{A}) \left(\frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right)} \left(\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right) \\ \|\delta \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \geq 1 & \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})^{-1}\| \left(\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right) \end{array} \right.$$



Propiedades

Para cualquier matriz regular A y una norma subordinada cualquiera se verifica:

- $\text{Cond}(I)=1$

$$\|I\| = \sup_{x \in E} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = 1$$

- $\text{Cond}(A) \geq 1$

$$I = A \cdot A^{-1} \leftrightarrow \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

- $\text{Cond}(A^{-1}) = \text{cond}(A)$

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = \kappa(A^{-1})$$

- $\text{Cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$

$$\kappa(\alpha A) = \|\alpha A\| \cdot \|\alpha A^{-1}\| = |\alpha| \cdot \|A\| \cdot \left|\frac{1}{\alpha}\right| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

- Si B singular $\text{cond}(A) > \frac{\|A\|}{\|A-B\|}$

$$\exists x / \|x\| = 1 : B \cdot x = 0 \rightarrow (A-B)x = A \cdot x \rightarrow \|A-B\| \cdot \|x\| \geq \|A \cdot x\|$$

$$\rightarrow \left\{ \|A^{-1}\| \cdot \|A \cdot x\| \geq \|x\| \right\} \rightarrow \|A-B\| \cdot \|x\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow \kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| > \frac{\|A\|}{\|A-B\|}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Motivación

- Interpretación

- Acotación

- **Propiedades**

- Ejemplo



Ejemplo: cota con variación de b

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \delta b = \begin{pmatrix} 0'1 \\ -0'1 \\ 0,1 \\ -0'1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \delta x = \begin{pmatrix} 8'2 \\ -13'6 \\ 3'5 \\ -2'1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

	A	A^{-1}	$\kappa(A)$	b	δb	$\kappa(A) \frac{\ \delta b\ }{\ b\ }$	x	δx	$\frac{\ \delta x\ }{\ x\ }$
$\ *\ _1$	33	136	4488	119	0.4	15.1	4	27.4	6.85
$\ *\ _2$	30.3	98.6	2984	60.0	0.2	9.94	2	16.4	8.20
$\ *\ _\infty$	33	136	4488	33	0.1	13.6	1	13.6	13.6

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Motivación

- Interpretación

- Acotación

- Propiedades

- Ejemplo



Ejemplo: cota con variación de A

$$\delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix} \quad (A + \delta A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1242.5 & -1974.2 & 533.8 & -388.7 \\ -2063.3 & 3279.1 & -887.0 & 645.6 \\ 533.3 & -848.0 & 230.2 & -167.5 \\ -319.5 & 507.9 & -137.9 & 100.6 \end{pmatrix}$$

	$\kappa(A)$	A^{-1}	δA	$(A + \delta A)^{-1}$	$\ (A + \delta A)^{-1}\ \ \delta A\ $	x	δx	$\frac{\ \delta x\ }{\ x\ }$
$\ *\ _1$	4488	136	0.22	6609.1	1454	4	274	68.5
$\ *\ _2$	2984	98.6	0.231	4854.3	1120.5	2	164	82.0
$\ *\ _\infty$	4488	136	0.3	6875	2062.5	1	136	136

Nota : $\|\delta A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1 \Rightarrow$ No es aplicable

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Motivación
- Interpretación
- Acotación
- Propiedades
- Ejemplo



Cálculo del determinante de una matriz

A partir de los resultados de la factorización de la matriz

- Doodlitle

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \Rightarrow |\mathbf{A}| = |\mathbf{M}| \cdot |\mathbf{L}| \cdot |\mathbf{U}| = (-1)^p \cdot 1 \cdot |\mathbf{U}| = (-1)^p \prod_{i=1}^n u_i^i$$

- Crout

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}^T \Rightarrow |\mathbf{A}| = |\mathbf{L}| \cdot |\mathbf{D}| \cdot |\mathbf{L}^T| = 1 \cdot |\mathbf{D}| \cdot 1 = \prod_{i=1}^n d_i^i$$

- Choleski

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \Rightarrow |\mathbf{A}| = |\mathbf{L}| \cdot |\mathbf{L}^T| = |\mathbf{L}|^2 = \prod_{i=1}^n (l_i^i)^2$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- *Determinante*

- *Inversa*



Aplicaciones: Cálculo de la inversa

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Determinante
- Inversa

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} = \frac{1}{2} 1^a \\ 2^a - \frac{1}{2} 1^a \\ 3^a - \frac{1}{2} 1^a \\ 4^a - \frac{1}{2} 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & -4 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^a - \frac{2}{3} 2^a \\ = \frac{1}{3} 2^a \\ 3^a - \frac{1}{3} 2^a \\ 4^a - \frac{9}{3} 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 & -\frac{5}{2} & -7 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} & -4 \\ 1 & 9 & 3 & -8 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{8}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & 13 & -\frac{1}{2} & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^a - \frac{13}{10} 3^a \\ 2^a - \frac{1}{2} 3^a \\ = \frac{3}{5} 3^a \\ 4^a - \frac{63}{10} 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{13}{6} & \frac{8}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{19}{3} \\ -\frac{1}{2} & -3 & \frac{21}{2} & 13 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{109}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{13}{10} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{529}{10} & -\frac{47}{10} & -\frac{51}{10} & -\frac{63}{10} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^a - \frac{109}{529} 4^a \\ 2^a - \frac{55}{529} 4^a \\ 3^a - \frac{38}{529} 4^a \\ = \frac{10}{529} 4^a \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} -\frac{7}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{13}{10} & \frac{109}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{19}{5} \\ -\frac{47}{10} & -\frac{51}{10} & -\frac{63}{10} & \frac{529}{10} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-218}{529} & \frac{-26}{529} & \frac{-1}{529} & \frac{-109}{529} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{6}{529} & \frac{-16}{529} & \frac{-82}{529} & \frac{55}{529} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{33}{529} & \frac{-88}{529} & \frac{78}{529} & \frac{38}{529} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-47}{529} & \frac{-51}{529} & \frac{-63}{529} & \frac{10}{529} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{-218}{529} & \frac{-26}{529} & \frac{-1}{529} & \frac{-109}{529} \\ \frac{6}{529} & \frac{-16}{529} & \frac{-82}{529} & \frac{55}{529} \\ \frac{33}{529} & \frac{-88}{529} & \frac{78}{529} & \frac{38}{529} \\ \frac{-47}{529} & \frac{-51}{529} & \frac{-63}{529} & \frac{10}{529} \end{array} \right)$$



Descripción

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Dado un sistema lineal $Ax=b$ buscamos una matriz K y un vector c tal que la solución única del sistema $y=Ky+c$ sea igualmente solución del sistema inicial.

$$Ax = b \Rightarrow y = Ky + c$$

La forma del sistema sugiere un método de resolución iterativa

$$x_0 \quad x_{n+1} = Kx_n + c$$

Dado el método iterativo se debe asegurar su:

– Convergencia $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$

– Consistencia $y = Ky + c = A^{-1}b$

Ejemplo	Consistencia	Convergencia
$x_{n+1} = 2x_n - A^{-1}b$	Si	No
$x_{n+1} = x_n/2 - A^{-1}b$	No	Si

[Demo](#)



Definiciones y teoremas (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

- Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

T^{ma}: Un método iterativo es consistente si y solamente si:

- (I-K) es inversible
- $c = (I-K)A^{-1}b$

[Demo](#)

Definición: convergencia de una sucesión vectorial

$$\{x_n\} \rightarrow y \quad \text{si} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{Z} / \forall k > N(\varepsilon) : \|y - x_k\| < \varepsilon$$

T^{ma}: Dada una matriz cuadrada cualquiera y una norma matricial, se tiene que

- $\rho(A) \leq \|A\|$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \|A\|_\varepsilon / \|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$

[Demo](#)

T^{ma}: Dado un método iterativo consistente siguientes proposiciones son equivalentes:

$$x_n = Kx_{n-1} + c$$

- El método es convergente
- Para alguna norma matricial $\|K\| < 1$
- $\rho(K) < 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} K^n = [0]$

[Demo](#)



Definiciones y teoremas (II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

T^{ma}: Si alguna norma matricial de la matriz de iteración es menor que la unidad, entonces el método es convergente y se verifican las siguientes cotas de error:

$$\|y - x_n\| \leq \|K\|^n \|y - x_0\|$$

$$\|y - x_n\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x_1 - x_0\|$$

[Demo](#)

T^{ma}: Dada una matriz regular A, la matriz (A'A) es definida positiva.

[Demo](#)

Esto permite cambiar el sistema $Ax=b$ a otro equivalente $(A'A)x=(A'b)$ cuya matriz sea definida positiva.

T^{ma}: Si A, C, (A+C) y (A+BCD) son matrices cuadradas no singulares se verifica la siguiente identidad matricial

$$(A+BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$$

[Demo](#)



Descomposición y Métodos

Sea A una matriz regular con elementos no nulos en la diagonal, entonces admite la siguiente descomposición:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = D - L - U; \begin{cases} (D)_i^j = a_i^j \delta_i^j \\ (L)_i^j = -a_i^j \text{ si } i > j, 0 \text{ resto} \\ (U)_i^j = -a_i^j \text{ si } i < j, 0 \text{ resto} \end{cases}$$

$$Ax = b \leftrightarrow (D - L - U)x = b \rightarrow x = Kx + c$$

Jacobi:

$$(D - L - U)x = b \rightarrow Dx = (L + U)x + b \rightarrow x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

Gauss Seidel

$$(D - L - U)x = b \rightarrow (D - L)x = Ux + b \rightarrow x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b$$

Relajación (SOR)

$$\left(\left(\frac{D}{\omega} - L \right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U \right) \right) x = b \rightarrow \left(\frac{D}{\omega} - L \right) x = \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U \right) x + b \rightarrow$$

$$\rightarrow x = (D - \omega L)^{-1} \left((1-\omega)D + \omega U \right) x + (D - \omega L)^{-1} \omega b$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición

- Jacobi

- Gauss-Seidel

- Relajación

- Tmas Convergencia

- Ejemplos



Jacobi

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- **Jacobi**
- Gauss-Seidel
- Relajación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

$$x_k = D^{-1} (L + U) x_{k-1} + D^{-1} b \leftrightarrow D x_k = b + (L + U) x_{k-1}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & 0 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & 0 & \dots & a_3^n \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_{k-1}$$

Algoritmo

Bucle para k desde 1 hasta el número de iteraciones

Bucle para i desde 1 hasta n (orden del sistema)

$$x_k^i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_i^j x_{k-1}^j - \sum_{j=i+1}^n a_i^j x_{k-1}^j}{a_i^i}$$

Fin bucle i

Fin bucle k

NOTA: La matriz de iteración de Jacobi tiene la diagonal nula



Gauss-Seidel

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- **Gauss-Seidel**
- Relajación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

$$x_k = (D - L)^{-1} U x_{k-1} + (D - L)^{-1} b \leftrightarrow D x_k = b + U x_{k-1} + L x_k$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 x^1 \\ a_2^2 x^2 \\ a_3^3 x^3 \\ \vdots \\ a_n^n x^n \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ 0 & 0 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ 0 & 0 & 0 & & a_3^n \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_{k-1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_k$$

Algoritmo

Bucle para k desde 1 hasta el número de iteraciones

Bucle para i desde 1 hasta n (orden del sistema)

$$x_k^i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_i^j x_k^j - \sum_{j=i+1}^n a_i^j x_{k-1}^j}{a_i^i}$$

Fin bucle i

Fin bucle k

NOTA: La matriz de iteración de Gauss Seidel tiene la primera columna nula



Relajación

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- **Relajación**
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

$$x_k = (D - \omega L)^{-1} \left((1 - \omega) D + \omega U \right) x_{k-1} + (D - \omega L)^{-1} \omega b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D x_k = (1 - \omega) D x_{k-1} + \omega (b + U x_{k-1} + L x_k)$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 x^1 \\ a_2^2 x^2 \\ a_3^3 x^3 \\ \vdots \\ a_n^n x^n \end{pmatrix}_k = (1 - \omega) \begin{pmatrix} a_1^1 x^1 \\ a_2^2 x^2 \\ a_3^3 x^3 \\ \vdots \\ a_n^n x^n \end{pmatrix}_{k-1} + \omega \left\{ \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ 0 & 0 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3^n \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_{k-1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_k \right\}$$

Algoritmo

Bucle para k desde 1 hasta el número de iteraciones

Bucle para i desde 1 hasta n (orden del sistema)

$$x_k^i = (1 - \omega) x_{k-1}^i + \omega \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_i^j x_k^j - \sum_{j=i+1}^n a_i^j x_{k-1}^j}{a_i^i}$$

Fin bucle i

Fin bucle k

NOTA: Gauss Seidel es un caso particular de relajación para $\omega=1$



SOR y Matrices definidas positivas

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

T^{ma}: Si $a_i^i \neq 0 \forall i$ entonces $\rho(\mathbf{K}_{SOR}) \geq |\omega - 1|$ y por tanto el método SOR sólo puede converger cuando $0 < \omega < 2$ (Kahan).

[Demo](#)

Todos los métodos vistos se basan en descomponer $A = M - N$, con M inversible, para generar el método $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

T^{ma}: Si A es una matriz definida positiva, descompuesta en la forma $A = M - N$, con M inversible, y la matriz $(M^{-1}N)$ también es definida positiva, entonces $\rho(M^{-1}N) < 1$ y el método es convergente.

Corolario I: Si A es definida positiva, el método de Jacobi converge para cualesquiera elección del vector inicial.

Corolario II: Si A es definida positiva, el método de relajación converge para cualesquiera elección del vector inicial siempre que $0 < \omega < 2$. (Ostrowski-Reich)

[Demo](#)



Matrices tridiagonales y especiales

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- **Tmas Convergencia**
- Ejemplos

Tma: Si la matriz A del sistema verifica que $a_i^i > 0 \wedge \forall i \neq j : a_i^j \leq 0$ entonces será válida una y sólo una de las afirmaciones siguientes (Stein-Rosenberg):

- $\rho(\mathbf{K}_{GS}) = \rho(\mathbf{K}_J) = 0$
- $\rho(\mathbf{K}_{GS}) = \rho(\mathbf{K}_J) = 1$
- $0 \leq \rho(\mathbf{K}_{GS}) < \rho(\mathbf{K}_J) < 1$
- $1 \leq \rho(\mathbf{K}_J) < \rho(\mathbf{K}_{GS})$

[Demo](#)

Tma: Si la matriz A del sistema es tridiagonal, los radios espectrales de Jacobi y Gauss-Seidel están relacionados mediante.

$$\rho(\mathbf{K}_{GS}) = \rho(\mathbf{K}_J)^2$$

[Demo](#)

Tma: Si la matriz A del sistema es definida positiva y tridiagonal, el valor óptimo del parámetro de relajación y el radio espectral vienen dados por

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}} \quad \rho_{\text{opt}}(\mathbf{K}_{\text{SOR}}) = |\omega_{\text{opt}} - 1|$$

[Demo](#)



Matrices diagonales dominantes

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

Def: Una matriz se denomina estrictamente diagonal dominante cuando para cada fila, la suma en valor absoluto de sus elementos es menor que el valor absoluto del elemento de la diagonal.

Si la relación se verifica con menor o igual, entonces es diagonal dominante,

T^{ma}: Si la matriz A del sistema es de diagonal estrictamente dominante, el método de Jacobi converge para cualesquiera elección del vector inicial.

[Demo](#)

T^{ma}: Si la matriz A del sistema es de diagonal dominante y alguna fila es estrictamente dominante, el método de Gauss-Seidel converge para cualesquiera elección del vector inicial.

[Demo](#)

NOTA: Aunque en algunos casos hay relaciones entre el comportamiento de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, no siempre la convergencia (o divergencia) de uno de ellos asegura la del otro.



Convergencia de Jacobi y no GS (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
 - Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- **Tmas Convergencia**
- Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Convergente

$$P_J(x) = x^3 \rightarrow \sigma(\mathbf{K}_J) = \{0\} \Rightarrow \rho(\mathbf{K}_J) = 0 < 1$$

$$\mathbf{K}_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Divergente

$$P_G(x) = -x(x-2)^2 \rightarrow \sigma(\mathbf{K}_G) = \{0, 2, 2\} \Rightarrow \rho(\mathbf{K}_G) = 2 > 1$$



Convergencia de Jacobi y no GS (II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

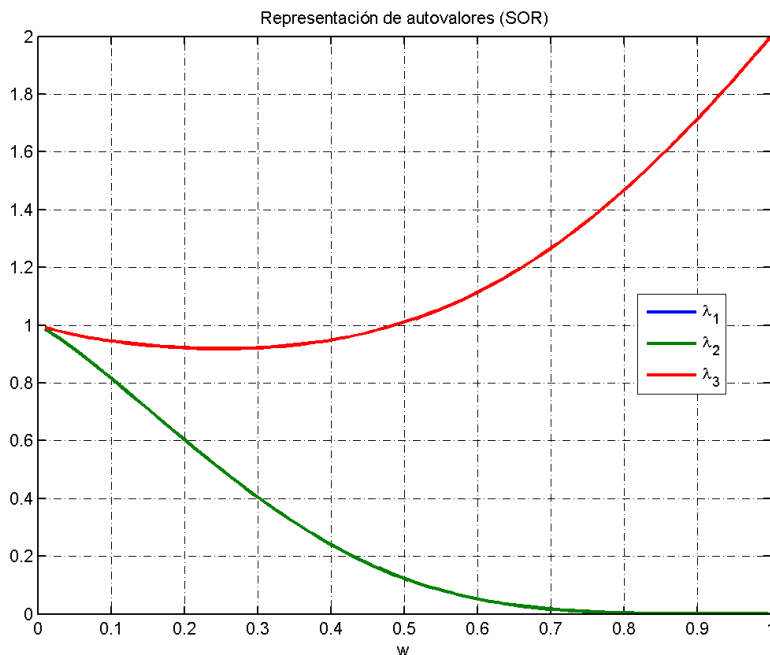
➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

$$\mathbf{K}_S = (\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1} \{ (1 - \omega) \mathbf{D} + \omega \mathbf{U} \} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \omega & -2\omega & 2\omega \\ -\omega(1 - \omega) & 2\omega^2 - \omega + 1 & -2\omega^2 - \omega \\ -2\omega(1 - \omega)^2 & -4\omega^3 + 6\omega^2 - 2\omega & 4\omega^3 - 2\omega^2 - \omega + 1 \end{pmatrix}$$



$$\omega = 0.2$$

$$\mathbf{K}_S = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 & 0.4 \\ -0.16 & 0.88 & -0.28 \\ -0.256 & -0.192 & 0.752 \end{pmatrix}$$

$$\rho(\mathbf{K}_S) = 0.9216 < 1$$

Convergente



Convergencia de GS y no Jacobi

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
 - Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- **Tmas Convergencia**
- Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_J(x) = x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \rightarrow \rho(\mathbf{K}_J) = 1$$

Divergente

$$\mathbf{K}_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$P_G(x) = x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x \rightarrow \rho(\mathbf{K}_J) = 0.5 < 1$$

Convergente



Convergencia de GS y no Jacobi (II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

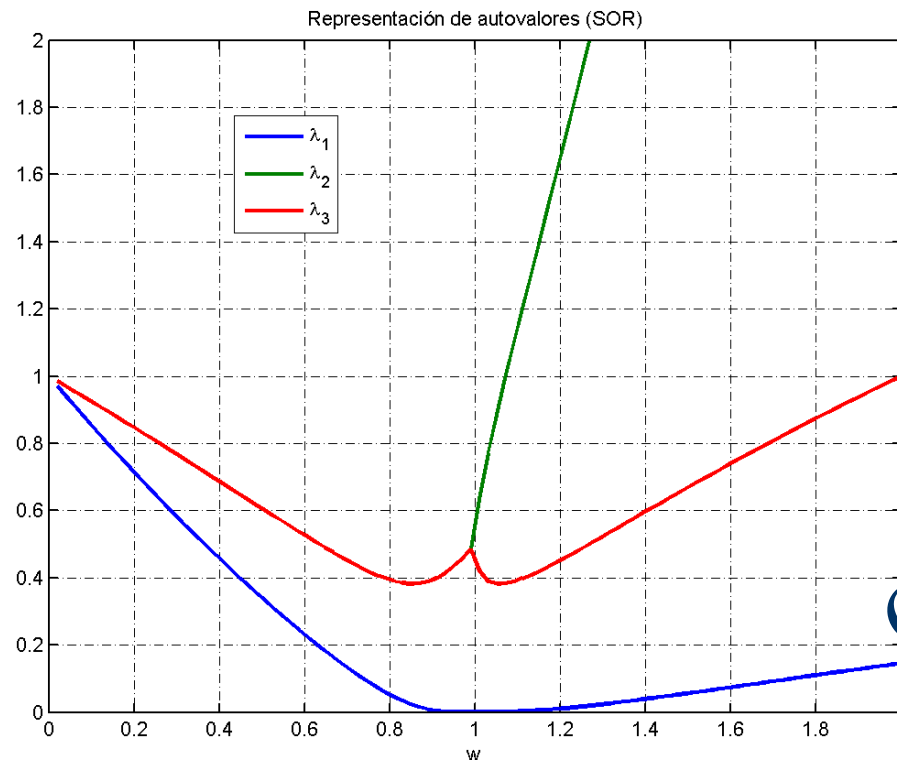
➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relaxación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

$$\mathbf{K}_S = (\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1} \{ (1 - \omega) \mathbf{D} + \omega \mathbf{U} \} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \omega & \frac{1}{2} \omega & \frac{1}{2} \omega \\ -\omega(1 - \omega) & -\frac{1}{2} \omega^2 - \omega + 1 & -\frac{1}{2} \omega(\omega + 2) \\ \frac{1}{2} \omega(1 - \omega)^2 & \frac{1}{4} \omega(\omega + 2)(1 - \omega) & -\frac{1}{4} \omega^3 - \frac{1}{4} \omega^2 - \omega + 1 \end{pmatrix}$$



$$\omega = 0.85 \rightarrow \rho = 0.3820$$

Convergente



Ejemplo completo (I)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

Dado el sistema anterior:

1. Calcular las matrices de iteración de los diferentes métodos
2. Estudiar su convergencia
3. Determinar el número de iteraciones necesarias para tener un error inferior a 0.001 partiendo del origen y utilizando la norma infinito
4. Realizar las iteraciones anteriores y comprobar cuantas hubieran sido realmente necesarias.

Jacobi:

$$\mathbf{K}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0'5 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_J = \mathbf{D}^{-1}b = \begin{pmatrix} 1'5 \\ -1'5 \end{pmatrix}$$

$$P_J(x) = x^2 - \frac{1}{4} \rightarrow \rho(\mathbf{K}_J) = 0'5$$

Gauss-Seidel

$$\mathbf{K}_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0'5 \\ 0 & 0'25 \end{pmatrix}$$

$$c_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} b = \begin{pmatrix} 1'50 \\ -0'75 \end{pmatrix}$$

$$P_G(x) = x^2 - \frac{1}{4}x \rightarrow \rho(\mathbf{K}_G) = 0'25 < 1$$

Como cabía esperar (matriz tridiagonal, de diagonal estrictamente dominante y definida positiva), ambos métodos convergen, y, el radio espectral de Gauss-Seidel es el cuadrado del de Jacobi, por lo que su convergencia es más rápida.



Ejemplo completo (II)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

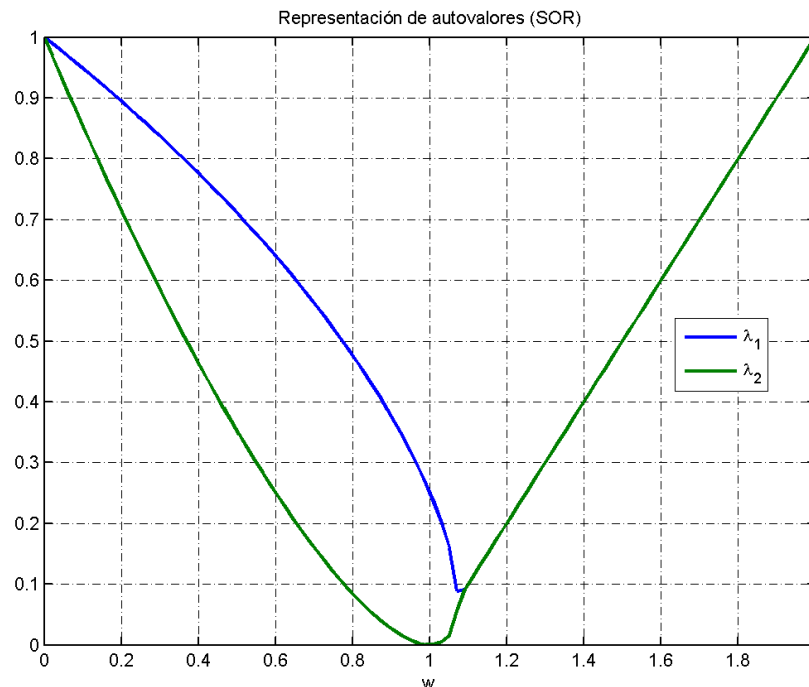
➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

Relajación (SOR)

$$\mathbf{K}_S = (\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1} \{ (1 - \omega) \mathbf{D} + \omega \mathbf{U} \} = \begin{pmatrix} 1 - \omega & \frac{1}{2} \omega \\ \frac{1}{2} \omega (1 - \omega) & \frac{1}{4} \omega^2 - \omega + 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_S = (\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1} \omega \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1.5 \omega \\ 0.75 \omega (\omega - 2) \end{pmatrix}$$



$$\omega = 1.1$$

$$\mathbf{K}_S = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.55 \\ -0.055 & 0.2025 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1.65 \\ -0.7425 \end{pmatrix}$$

$$P_S(x) = x^2 - 0.1025x + 0.01$$

$$\rho(\mathbf{K}_S) = 0.1$$

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 0.25}} = 1.0718$$

$$\rho_{\text{opt}}(\mathbf{K}_S) = 0.0718$$



Ejemplo completo (III)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Número de iteraciones

$$\|x - x^{(n)}\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \rightarrow n \geq \frac{\ln(\varepsilon(1 - \|K\|)) - \ln\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}{\ln\|K\|}$$

	$\ K\ _{\infty}$	$\ x^{(1)} - x^{(0)}\ = \ c\ $	n>
Jacobi	0.5	1.5	11.55
Gauss-Seidel	0.5	1.5	11.55
Relajación	0.65	1.65	19.63

$$\text{Jacobi} \quad x_k^i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_i^j x_{k-1}^j - \sum_{j=i+1}^n a_i^j x_{k-1}^j}{a_i^i}$$

$$\text{Gauss - Seidel} \quad x_k^i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_i^j x_{k-1}^j - \sum_{j=i+1}^n a_i^j x_k^j}{a_i^i}$$

$$\text{Relajación} \quad x_k^i = (1 - \omega) x_{k-1}^i + \omega \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_i^j x_{k-1}^j - \sum_{j=i+1}^n a_i^j x_k^j}{a_i^i}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

**Ejemplo completo (IV)**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

➤ Motivación**➤ Objetivos****➤ Temario**

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía**➤ Software**

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

Jacobi

$$\begin{cases} x_k^1 = \frac{b_1 - a_1^2 x_{k-1}^2}{a_1^1} = \frac{3 + x_{k-1}^2}{2} \\ x_k^2 = \frac{b_2 - a_2^1 x_{k-1}^1}{a_2^2} = \frac{-3 + x_{k-1}^1}{2} \end{cases}$$

Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_k^1 = \frac{b_1 - a_1^2 x_{k-1}^2}{a_1^1} = \frac{3 + x_{k-1}^2}{2} \\ x_k^2 = \frac{b_2 - a_2^1 x_k^1}{a_2^2} = \frac{-3 + x_k^1}{2} \end{cases}$$

Relajación

$$\begin{cases} x_k^1 = (1 - \omega) x_{k-1}^1 + \omega \frac{b_1 - a_1^2 x_{k-1}^2}{a_1^1} = -0.1 x_{k-1}^1 + 1.1 \frac{3 + x_{k-1}^2}{2} \\ x_k^2 = (1 - \omega) x_{k-1}^2 + \omega \frac{b_2 - a_2^1 x_k^1}{a_2^2} = -0.1 x_{k-1}^2 + 1.1 \frac{-3 + x_k^1}{2} \end{cases}$$

Jacobi

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \\ x_1^2 = \frac{-3+0}{2} = -\frac{3}{2} \\ x_2^1 = \frac{3+\frac{-3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \\ x_2^2 = \frac{-3+\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \\ x_1^2 = \frac{-3+\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4} \\ x_2^1 = \frac{3+\frac{-3}{4}}{2} = \frac{5}{4} \\ x_2^2 = \frac{-3+\frac{5}{4}}{2} = -\frac{7}{8} \end{cases}$$

Relajación

$$\begin{cases} x_1^1 = -0.1 \times 0 + 1.1 \frac{3+0}{2} = 1.65 \\ x_1^2 = -0.1 \times 0 + 1.1 \frac{-3+1.65}{2} = -0.7425 \\ x_2^1 = -0.1 \times 1.65 + 1.1 \frac{3-0.7425}{2} = 1.0766 \\ x_2^2 = -0.1 \times (-0.7425) + 1.1 \frac{-3+1.0766}{2} = -0.9836 \end{cases}$$



Ejemplo completo (V)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos

	Jacobi		Gauss-Seidel		Relajación (w=1.1)	
00	0	0	0	0	0	0
01	1.5000	-1.5000	1.5000	-0.7500	1.6500	-0.7425
02	0.7500	-0.7500	1.1250	-0.9375	1.0766	-0.9836
03	1.1250	-1.1250	1.0313	-0.9844	1.0014	-1.0009
04	0.9375	-0.9375	1.0078	-0.9961	0.9994	-1.0003
05	1.0313	-1.0313	1.0020	-0.9990	0.9999	-1.0000
06	0.9844	-0.9844	1.0005	-0.9998	1.0000	-1.0000
07	1.0078	-1.0078	1.0001	-0.9999	1.0000	-1.0000
08	0.9961	-0.9961	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
09	1.0020	-1.0020	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
10	0.9990	-0.9990	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
11	1.0005	-1.0005	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
12	0.9998	-0.9998	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
13	1.0001	-1.0001	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
14	0.9999	-0.9999	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
15	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
16	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
17	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
18	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
19	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
20	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000



Ejemplo completo (VI)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos

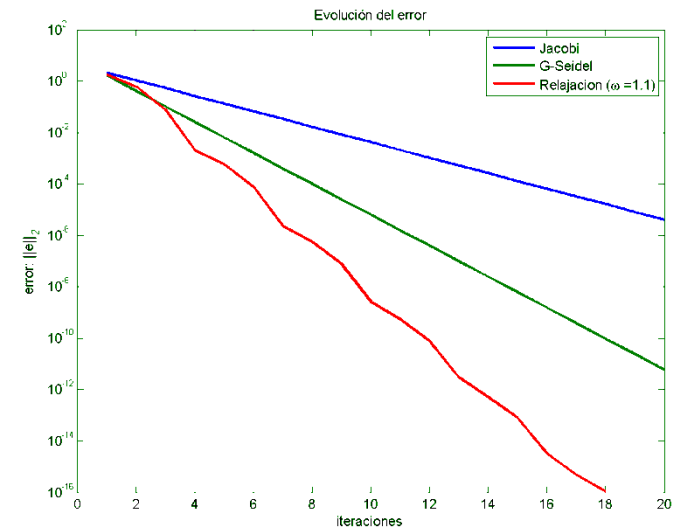
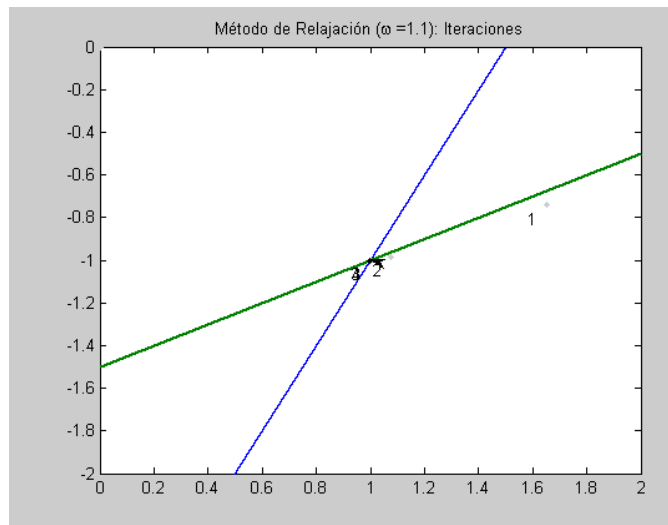
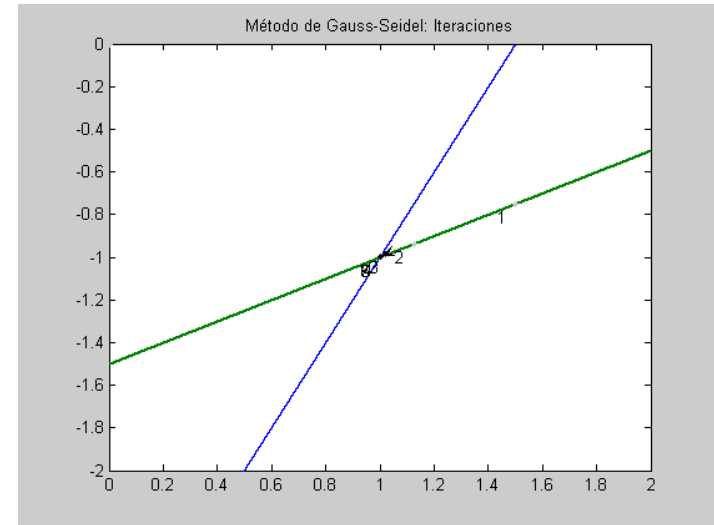
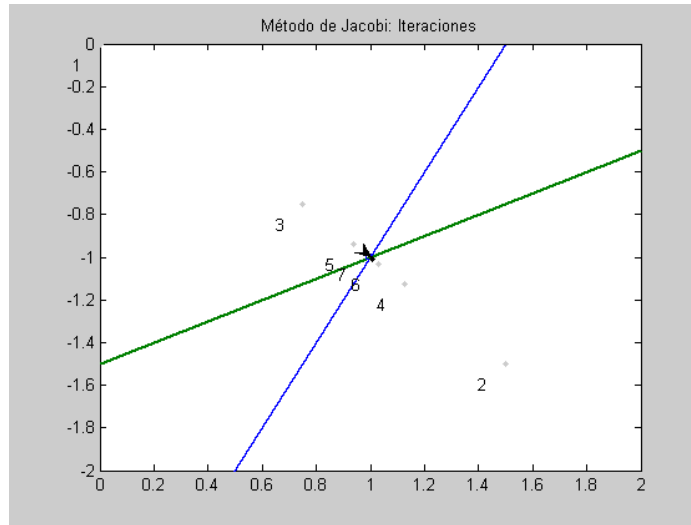
➤ Métodos

- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Descomposición
- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Relajación
- Tmas Convergencia
- Ejemplos





Anexo

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Demostraciones
- Algoritmos



Demo: Normas equivalentes

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

$$\bullet \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_{\infty} \rightarrow \sup_{i=1, \dots, n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

$$\bullet \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty} \rightarrow \sup_{i=1, \dots, n} |x_i| = x_s \leq x_s \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{x_s} \right|^2} \leq x_s \sqrt{n}$$

$$\bullet \frac{1}{n} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_1 \rightarrow \frac{1}{n} \|x\|_1 \leq \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty} \leq \sqrt{n} \|x\|_1$$

$$\bullet \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \rightarrow \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{|x_i|^2} = \|x\|_1$$



Demo: Normas matriciales subordinadas

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- Def.: Si $\|x\|$ es una norma vectorial sobre C^n entonces se define una norma matricial sobre el conjunto de las matrices de orden n , denominada norma subordinada, mediante

$$\|A\| = \sup_{x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$$

Ejemplos:

- $\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|A \cdot x\|_1 = \max_{i \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_i^j|$ (máximo de columnas)
- $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|A \cdot x\|_2 = \sqrt{\rho(A \cdot A^*)}$ (radio espectral de la normal)
- $\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|A \cdot x\|_\infty = \max_{i \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_i^j|$ (máximo de filas)

[Volver](#)



MATLAB para Gauss con pivote simple

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

```

1. [n,m]=size(A);if m~=n+1;error('falla matriz ampliada');end
2. for i=1:n
3.     [p,j]=max(abs( A(i:n,i) ));j=j+i-1;
4.     if p==0; error('sistema indeterminado o incompatible');end
5.     if j~=i; p=A(j,i:n); A(j,i:n)=A(i,i:n); A(i,i:n)=p;end
6.     for j=i+1:n; m=-A(j,i)/A(i,i); A(j,i:n)=A(j,i:n)+m*A(i,i:n); end
7. end
8. x(n)=A(n,n+1)/A(n,n)
9. for i=n-1,1,-1; x(i)=(a(i,n+1)-a(i,i+1:n)*x(i+1:n))/a(i,i);end

```

● OPERACIONES

	Tringularizar	Resolver	Total
+	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (n-i) = \frac{n^2(n-1)}{3}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{2n^3 - 5n^2 + 3n}{6}$
×			
÷	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n 1 = \frac{n(n-1)}{2}$	n	$\frac{n^2 + n}{2}$



MATLAB para Gauss con pivote doble

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

```
1. [n,m]=size(A);if m~=n+1;error('falla matriz ampliada');end
2. orden=1:n;
3. for i=1:n % Triangularización
4.     [p,j]=max(abs( A(i:n,i:n) ));j=j+i-1; % Pivote y posición
5.     [p,k]=max(p);j=j(k);k=k+i-1;
6.     if p==0; error('sistema indeterminado o incompatible');end
7.     if j~=i; p=A(j,i:n); A(j,i:n)=A(i,i:n); A(i,i:n)=p;end % Intercambio de filas
8.     if k~=i;
9.         p=A(i:n,k); A(i:n,k)=A(i:n,i); A(i:n,i)=p;
10.        p=orden(k); orden(k)=orden(i);orden(i)=p;
11.    end
12.    for j=i+1:n; m=-A(j,i)/A(i,i); A(j,i:n)=A(j,i:n)+m*A(i,i:n); end
13. end
14. x(n)=A(n,n+1)/A(n,n); % Resolución del sistema triangular
15. for i=n-1,1,-1; x(i)=(a(i,n+1)-a(i,i+1:n)*x(i+1:n))/a(i,i);end;
16. x=x(orden); % Ordenación de los resultados
```

[Volver](#)



MATLAB para Gauss con pivote escalado

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

```
1. [n,m]=size(A);if m~=n+1;error('falla matriz ampliada');end
2. for i=1:n % Triangularización
3.     escala=max(abs( A(i:n,i:n)' ) ); ; % Pivote y posición
4.     if any(escala); error('sistema indeterminado o incompatible');end
5.     [p,j]=max(abs( A(i:n,i)./escala' ) );j=j+i-1;
6.     if j~=i; p=A(j,i:n); A(j,i:n)=A(i,i:n); A(i,i:n)=p;end % Intercambio de filas
7.     for j=i+1:n; m=-A(j,i)/A(i,i); A(j,i:n)=A(j,i:n)+m*A(i,i:n); end
8. end
9. x(n)=A(n,n+1)/A(n,n); % Resolución del sistema triangular
10. for i=n-1,1,-1; x(i)=(a(i,n+1)-a(i,i+1:n)*x(i+1:n))/a(i,i);end
```

[**Volver**](#)



Factorización: Demostraciones I

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha_{k+1}^k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha_{k+1}^n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad 2I - L_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1}^k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1}^n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_k (2I - L_k) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1}^k - \alpha_{k+1}^k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1}^n - \alpha_{k+1}^n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I$$

[Volver](#)



Demostración de inversa de L

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k+1}^k & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k+1}^n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad 2I - L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1}^k & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1}^n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_k(2I - L_k) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1}^k - \alpha_{k+1}^k & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1}^n - \alpha_{k+1}^n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

[Volver](#)



Factorización: Demostraciones II

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

- **T^{ma}:** El producto de matrices triangulares inferiores (superiores) es una matriz triangular inferior (superior)

$$C = A \cdot B \quad \text{con } A, B \text{ triang. inf. } (\forall i < j : a_i^j = b_i^j)$$

$$\forall i < j : c_i^j = \sum_{k=1}^n a_i^k b_k^j = \sum_{k=1}^i a_i^k b_k^j + \sum_{k=i+1}^n a_i^k b_k^j =$$

$$= \sum_{k=1}^i a_i^k \cdot 0 + \sum_{k=i+1}^n 0 \cdot b_k^j = 0 \Rightarrow C \text{ triang. inf.}$$

[Volver](#)

- **T^{ma}:** La inversa de una matriz triangular inferior (superior) es una matriz triangular inferior (superior)

- Demostración por inducción: se verifica para 1, supuesto que se verifica para n hay que demostrarlo para $n+1$

$$\mathbf{A}_{n+1} \cdot \mathbf{B}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n & 0 \\ c_{n+1}^1 & a_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{B}_n & d_1^{n+1} \\ d_{n+1}^1 & b_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_n \cdot d_1^{n+1} + 0 \cdot b_{n+1}^{n+1} = 0 \Rightarrow d_1^{n+1} = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{B}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_n & 0 \\ d_{n+1}^1 & b_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_{n+1} \text{ triang. inferior}$$

[Volver](#)



Propiedades de la matriz de intercambio

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Cuestiones previas

➤ Sis. Lin. - Directos

➤ Método de Gauss

➤ Factorización

➤ Condicionamiento

➤ Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

➤ Métodos

➤ Sis. no lineales

➤ Punto Fijo

➤ Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

$$M_i^j = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \overset{i-esima}{0} & \dots & \overset{j-esima}{0} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & 0 & & 0 \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & & & & & I_{n-j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-j} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{j-i-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Simetría

$$(M_i^j)^T = \begin{pmatrix} (I_{i-1})^T & 0 & 0 \\ 0 & B^T & 0 \\ 0 & 0 & (I_{n-j})^T \end{pmatrix}$$

• Ortogonalidad

$$M_i^j M_i^j = \begin{pmatrix} I_{i-1} \cdot I_{i-1} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & I_{i-1} \cdot 0 + 0 \cdot B + 0 \cdot 0 & I_{i-1} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot I_{n-j} \\ 0 \cdot 0 + B \cdot B + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + B \cdot 0 + 0 \cdot I_{n-j} \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + I_{n-j} \cdot I_{n-j} \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot I_{j-i-1} + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + I_{j-i-1} \cdot I_{j-i-1} + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + I_{j-i-1} \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = I_{j-i+1}$$



Algoritmo de Factorización LU

- ENTRADA: Matriz A y vector b
- SALIDA: Solución x, o mensaje de indeterminación
- ALGORITMO

[Volver](#)

1. Repetir para i desde 1 hasta n (Proceso de factorización).
2. Repetir para j desde 1 hasta i-1
3. Calcular $l_i^j = \left[a_i^j - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k u_k^j \right] / u_j^j$
4. Hacer $l_i^i = 1$
5. Calcular $u_i^i = a_i^i - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k u_k^i$
6. Repetir para j desde i+1 hasta n
7. Calcular $u_i^j = a_i^j - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k u_k^j$
8. Repetir para i desde 1 hasta n repetir (Resolución sistema T.S.)
9. Calcular $y_i = \left[b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k y_k \right]$
10. Repetir para i desde n hasta 1 (Resolución sistema T.I.)
11. Calcular $x_i = \left[y_i - \sum_{k=i+1}^n u_i^k x_k \right] / u_i^i$
12. SALIDA x

- OPERACIONES

$$+, \times \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i-1) + 2 \sum_{i=1}^n [(n-i)] = \frac{n^2(n-1)}{2} + 2 \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3 + n^2 - 2n}{2}$$

$$\div \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} 1 + n = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Cuestiones previas
 - Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
 - Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
 - Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso
- Bibliografía
- Software



Algoritmo de Factorización de Crout

- ENTRADA: Matriz A y vector b
- SALIDA: Solución x, o mensaje de indeterminación
- ALGORITMO

[Volver](#)

1. Repetir para i desde 1 hasta n (Proceso de factorización).
2. Repetir para j desde 1 hasta i-1
3. Calcular $l_i^j = \left[a_i^j - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k d_k^j \right] / d_j^j$
4. Hacer $l_i^i = 1$
5. Calcular $d_i^i = a_i^i - \sum_{k=1}^{i-1} (l_i^k)^2 d_k^k$
6. Repetir para i desde 1 hasta n repetir (Resolución sistema T.S.)
7. Calcular $y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k y_k$
8. Repetir para i desde n hasta 1 (Resolución sistema diagonal)
9. Calcular $z_i = y_i / d_i^i$
10. Repetir para i desde n hasta 1 (Resolución sistema T.I.)
11. Calcular $x_i = z_i - \sum_{k=i+1}^n l_k^i x_k$
12. SALIDA x

- OPERACIONES

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i (i-1) + \sum_{i=1}^n (n-1) = \frac{n^2(n-1)}{3} + n^2 = \frac{n^3 + 3n^2 - 4n}{3}$$

$$\times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2(i-1) + \sum_{i=1}^n (n-1) = \frac{2n^2(n-1)}{3} + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{3}$$

$$\div \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} 1 + n = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Cuestiones previas
 - Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
 - Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
 - Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso
- Bibliografía
- Software



Algoritmo de Factorización de Choleski

- ENTRADA: Matriz A y vector b
- SALIDA: Solución x, o mensaje de indeterminación
- ALGORITMO

[Volver](#)

1. Repetir para i desde 1 hasta n (Proceso de factorización).
2. Repetir para j desde 1 hasta i-1
3. Calcular $l_i^j = \left[a_i^j - \sum_{k=1}^{j-1} l_i^k l_j^k \right] / l_j^j$
4. Calcular $l_i^i = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_i^k)^2}$
5. Repetir para i desde 1 hasta n repetir (Resolución sistema T.S.)
6. Calcular $y_i = \left[b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k y_k \right] / l_i^i$
7. Repetir para i desde n hasta 1 (Resolución sistema T.I.)
8. Calcular $x_i = \left[y_i - \sum_{k=i+1}^n l_i^k x_k \right] / l_i^i$
9. SALIDA x

- OPERACIONES

$$+, \times \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i (i-1) + \sum_{i=1}^n (n-1) = \frac{n(n^2-4)}{3} + n^2 = \frac{n^3 + 3n^2 - 4n}{3}$$

$$\div \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} 1 + 2n = \frac{n^2 - n}{2} + 2n = \frac{n^2 + 3n}{2}$$

$$\sqrt{\quad} \quad n$$

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Cuestiones previas
 - Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
 - Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
 - Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso
- Bibliografía
- Software



Demo: condicionamiento

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- ➤ Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
 - Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso
- Bibliografía
- Software

$$(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{b} - \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \delta \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x}$$

$$(1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\|) > 0 \rightarrow \delta \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} (\delta \mathbf{b} - \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \delta \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x})$$

$$\|\delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| (\|\delta \mathbf{b}\| + \|\delta \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| + \|\delta \mathbf{A}\| \cdot \|\delta \mathbf{x}\|)$$

$$\|\delta \mathbf{x}\| (1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\|) \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| (\|\delta \mathbf{b}\| + \|\delta \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|)$$

$$\|\delta \mathbf{x}\| \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\|} (\|\delta \mathbf{b}\| + \|\delta \mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|)$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\|} \left(\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \|\delta \mathbf{A}\| \right) \leq \frac{\text{cond}(\mathbf{A})}{1 - \text{cond}(\mathbf{A}) \left(\frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right)} \left(\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right)$$

$$(1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\|) < 0 \rightarrow \delta \mathbf{x}(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1} (\delta \mathbf{b} - \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{x})$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})^{-1}\| \left(\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \|\delta \mathbf{A}\| \right) \leq \|\mathbf{A}\| \|(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})^{-1}\| \left(\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right)$$



Demo: Consistencia y convergencia

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

Ejemplo	Consistencia $y = A^{-1}b$	Convergencia $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$
$x_{n+1} = 2x_n - A^{-1}b$	Si	No
$x_{n+1} = x_n/2 - A^{-1}b$	No	Si

$$x_{n+1} = 2x_n - A^{-1}b$$

$$\begin{cases} y = 2y - A^{-1}b \rightarrow y = A^{-1}b \\ x_{n+1} - x_n = 2(x_n - x_{n-1}) = 2^n(x_1 - x_0) \end{cases}$$

$$x_{n+1} = x_n/2 - A^{-1}b$$

$$\begin{cases} y = y/2 - A^{-1}b \rightarrow y = -2A^{-1}b \\ x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n(x_1 - x_0) \end{cases}$$



Demo: Acotación del radio espectral

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones

➤ Sis. Lin. - Iterativos

- Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

$$\forall \lambda \in \sigma(A) : \exists x \neq 0 / Ax = \lambda x \Rightarrow \|A\| \|x\| \geq \|Ax\| = |\lambda| \|x\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) : \|A\| \geq |\lambda| \Rightarrow \|A\| \geq \rho(A)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \|A\|_\varepsilon / \|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$$

$$\exists U \text{ unitaria : } U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_1^2 & \cdots & b_1^{n-1} & b_1^n \\ & \lambda_2 & \cdots & b_2^{n-1} & b_2^n \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & \lambda_{n-1} & b_{n-1}^n \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{ Definimos } D = \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \\ \delta^2 \\ \vdots \\ \delta^{n-1} \end{pmatrix}, \text{ entonces}$$

$$(UD)^{-1} A(UD) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta b_1^2 & \cdots & \delta^{n-2} b_1^{n-1} & \delta^{n-1} b_1^n \\ & \lambda_2 & \cdots & \delta^{n-3} b_2^{n-1} & \delta^{n-2} b_2^n \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & \lambda_{n-1} & b_{n-1}^n \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{ Si elegimos } \delta : \sum_{j=i+1}^n |\delta^{j-i} b_i^j| \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq n-1$$

$$\|A\|_\varepsilon = \|(UD)^{-1} A(UD)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left(|\lambda_i| + \sum_{j=i+1}^n |\delta^{j-i} b_i^j| \right) \leq \rho(A) + \varepsilon$$

[Volver](#)



Demo: Convergencia

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
- Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K^n = [0] \Rightarrow \text{Convergencia} (\Leftarrow)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_n = Kx_{n-1} + c \\ y = Ky + c \end{array} \right\} y - x_n = K(y - x_{n-1}) = \cdots K^n(y - x_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y - x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} K^n(y - x_0) = [0](y - x_0) = [0] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$$

$$\|K\| < 1 \Rightarrow \text{Convergencia}$$

$$y - x_n = K^n(y - x_0) \rightarrow \|y - x_n\| \leq \|K\|^n \|y - x_0\|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y - x_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|K\|^n \|y - x_0\| = [0]\|y - x_0\| = [0] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$$

$$\text{Convergencia} \Rightarrow \|K\| < 1$$

$$(K^{-1})^n(y - x_n) = (y - x_0) \rightarrow \|y - x_n\| \geq \frac{\|y - x_0\|}{\|K^{-1}\|^n} \text{ puesto que } \|K\| \|K^{-1}\| \geq 1 \Rightarrow \|K^{-1}\| \geq \frac{1}{\|K\|}$$

$$\|y - x_n\| \geq \|K\|^n \|y - x_0\| \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - x_n\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|K\|^n \|y - x_0\| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|K\|^n = 0 \Rightarrow \|K\| < 1$$

$$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \exists \|A\| < 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \|A\|_\varepsilon / \|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon < 1$$

$$\|A\| < 1 \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\| < 1$$

[Volver](#)



Demo: Acotación del error

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
 - Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

$$\left. \begin{array}{l} x_n = Kx_{n-1} + c \\ y = Ky + c \end{array} \right\} y - x_n = K^n (y - x_0) \Rightarrow \|y - x_n\| \leq \|K\|^n \|y - x_0\|$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } m > n \rightarrow x_m - x_n &= x_m \pm x_{m-1} \pm x_{m-2} \cdots \pm x_{n+1} - x_n = \\ &= (x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + (x_{m-2} - x_{m-3}) + \cdots (x_{n+1} - x_n) \\ \|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \|x_{m-2} - x_{m-3}\| + \cdots \|x_{n+1} - x_n\| \end{aligned}$$

$$\text{como } \|x_{n+1} - x_n\| \leq \|K\|^n \|x_1 - x_0\|$$

$$\|x_m - x_n\| \leq \left(\|K\|^{m-1} + \|K\|^{m-2} + \|K\|^{m-3} + \cdots + \|K\|^n \right) \|x_1 - x_0\|$$

$$\text{serie geométrica } \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 - a_{n+1}r}{1-r}$$

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{\|K\|^{m-1} - \|K\|^n \|K\|^{-1}}{1 - \|K\|^{-1}} \|x_1 - x_0\| \quad \text{y tomando límites}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = \|y - x_n\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|^{-1}} \|x_1 - x_0\|$$



Demo: Matriz normal

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Cuestiones previas
- Sis. Lin. - Directos
 - Método de Gauss
 - Factorización
 - Condicionamiento
 - Aplicaciones
- Sis. Lin. - Iterativos
 - Métodos
- Sis. no lineales
 - Punto Fijo
 - Descenso

➤ Bibliografía

➤ Software

B definida positiva $\Leftrightarrow \forall x : x^t B x \geq 0 \wedge x^t B x = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_k \in \sigma(B) : \lambda_k > 0$

$$\forall x : x^t (A^t A) x = (Ax)^t (Ax) = \tilde{x}^t \tilde{x} = \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i)^2 \geq 0$$

$$\tilde{x} = Ax = 0 \xrightarrow{A \text{ regular}} x = 0$$

[Volver](#)

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$$

$$(A + BCD) \left[A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1} \right] = I - B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1} + BCDA^{-1} - BCDA^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$$

[Volver](#)