



Titulación: Grado en Ingeniería
Asignatura: Análisis Numérico
Autor: César Menéndez

Última actualización: 02/02/2011

Ecuaciones no lineales

Planificación:

4 Teoría+1 Prácticas+2 Laboratorio

Materiales:

MATLAB

Conocimientos previos:

T^{mas}. básicos de Cálculo –
Desarrollos de Taylor – Sistemas
lineales –



Descripción del problema

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General
- Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

- Resolución de una ecuación: cálculo del valor o valores de x para los cuales se verifica que

$$F(x) = 0$$

- Problema bien planteado: existencia y unicidad de solución (condiciones de F)
- Solución analítica o calculable
 - Polinomios de grado mayor que 4
 - Funciones trascendentes y algebraicas
- Métodos de cálculo de raíces no analíticas
 - Métodos iterativos: generan sucesión de valores que se aproximan a la raíz
 - Convergencia – Criterios
$$|F(\alpha_n)| < \varepsilon \quad |\alpha_n - x| < \varepsilon \quad |\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \varepsilon$$
 - Velocidad
 - Estabilidad (propagación de errores)



Ejemplo

➤ Motivación

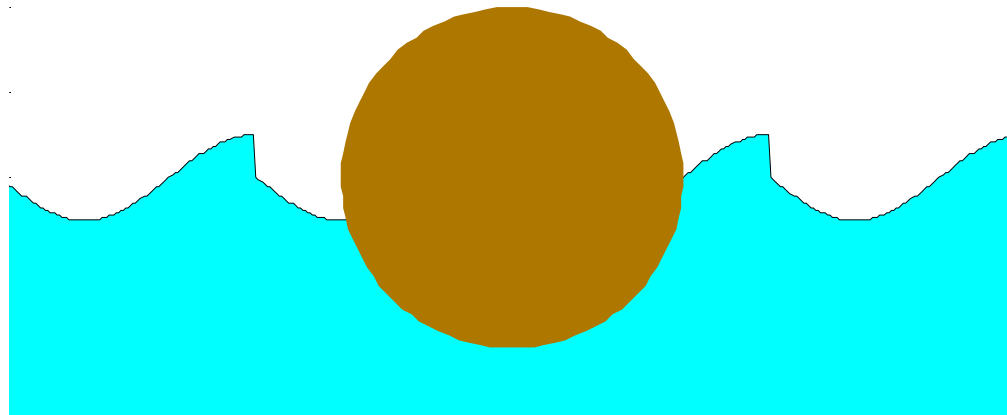
➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General
- Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software



- Una esfera de radio r y densidad ρ_e pesa $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e$
- El volumen del segmento esférico hundido en el agua una profundidad h viene dado por
$$\frac{\pi}{3}(3rh^2 - h^3)$$
- Encontrar la profundidad, en función del radio, a la cual una esfera de densidad 0.6 flota en el agua



Ejemplo

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General
- Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

- Planteamiento (Principio de Arquímedes): el empuje debe equilibrar el peso

$$\frac{\pi}{3}(3rh^2 - h^3)\rho_a = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_e$$

- Ecuación a resolver

$$0 = h^3\rho_a - 3rh^2\rho_a + 4r^3\rho_e \rightarrow$$

$$F(x) = x^3 - 3x^2 + 2.4 = 0 \quad \text{siendo} \quad x = \frac{h}{r}$$

- Procedimiento
 - Existencia y unicidad de solución : Polinomio de tercer grado con 3 raíces
 - Cálculo de la solución: obtención analítica o aproximada: { 2.6611, -0.7952, 1.1341 }
 - Coherencia de la solución { **1.1341** }



Objetivos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General
- Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

- Comprender e interpretar gráficamente los métodos, para así intuir sus ventajas e inconvenientes
- Diferenciar los métodos de intervalo de los de iteración funcional en cuanto a aplicabilidad y convergencia
- Entender el concepto de velocidad de convergencia y su importancia en la eficiencia de un método
- Conocer los problemas que presentan las raíces múltiples



Definiciones

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T_{mas}

Criterio de parada

Acotación del error

- Una función $F(x)$ es una aplicación de un conjunto inicial A en otro conjunto final B tal que a cada elemento del conjunto inicial le hace corresponder un elemento del conjunto final.

$$F : A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y = F(x)$$

- Resolver una ecuación consiste en hallar los elementos $\alpha \in A$, denominados raíces de la ecuación, que convierten la igualdad $F(x)=0$ en una identidad.
- Una raíz α se dice que tiene multiplicada de orden m cuando $F^{(k)}(\alpha)=0$, $k=0,1,\dots,m-1$ y $F^{(m)}(\alpha) \neq 0$. Cuando la multiplicidad es uno, la raíz se denomina simple.

Ejemplos:

Simple Doble

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + x \quad F(0) = 0 \quad F(1) = 0$$

$$F'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad F'(0) = 1 \quad F'(1) = 0$$

$$F''(x) = 6x - 4 \quad F''(1) = 2$$



Teoremas (I)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Criterio de parada

Acotación del error

● Teorema I (Teorema de Bolzano).

[Demo](#)

Sea $F(x)$ una función continua en $[a, b]$ con valores de signos opuestos en los extremos, entonces existe un punto c en $[a, b]$ en que la función se anula.

$$F(x) \in C[a, b] / F(a) \cdot F(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b] / F(c) = 0$$

● Teorema II

[Demo](#)

Si $F(x)$ es derivable en (a, b) , cambia de signo en los extremos y su derivada no se anula en todo el intervalo, entonces la ecuación $F(x) = 0$ tiene una raíz única en el mismo.

$$F(x) \in C^1(a, b) / F(a) \cdot F(b) < 0 \wedge \forall x \in (a, b) : F'(x) \neq 0 \\ \Rightarrow \exists! c \in [a, b] / F(c) = 0$$



Teoremas (II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T_{mas}

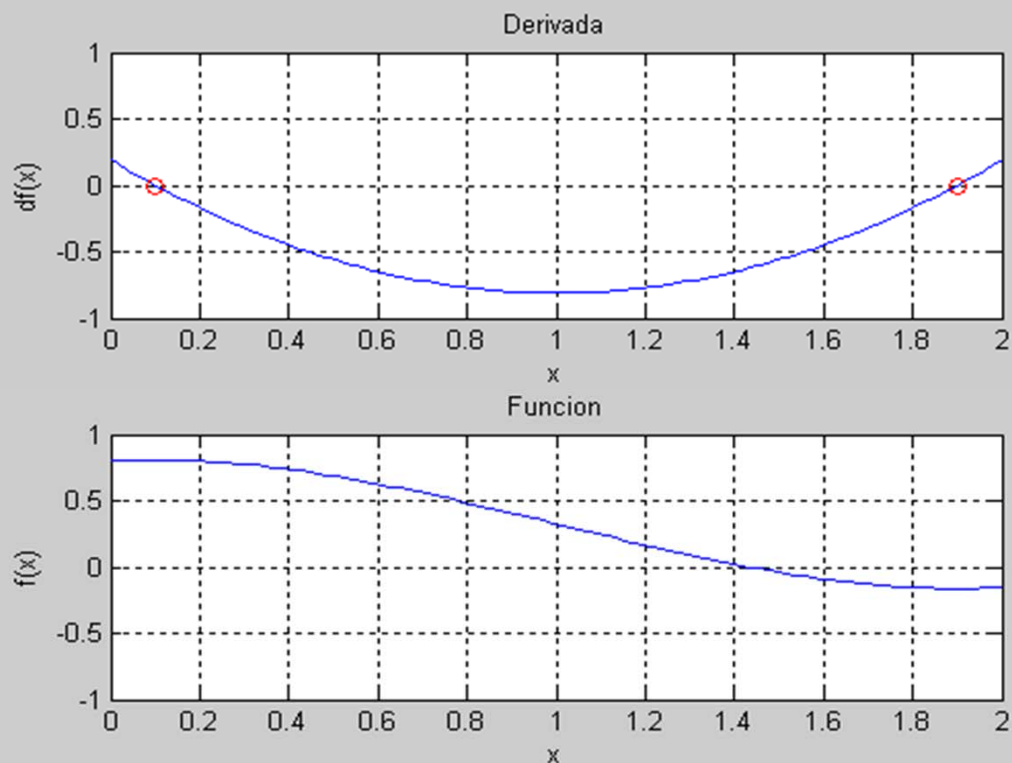
Criterio de parada

Acotación del error

• Teorema III

Entre dos raíces consecutivas de la ecuación $F'(x)=0$ existe, a lo sumo, una raíz de $F(x)=0$.

[Demo](#)



Si la función es monótona (creciente o decreciente) en un intervalo, la raíz, de existir, es única



Aproximación de la raíz

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T_{mas}

Criterio de parada

Acotación del error

- Son métodos iterativos $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow \alpha$
 - Condiciones de convergencia
 - Velocidad de convergencia
 - Test de parada: elemento de la sucesión que “aproxima” la raíz.
- Definición:
 - Una sucesión que converge a un valor α , se dice que lo hace con orden de convergencia k y constante asintótica L cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x^{(n+1)}|}{|\alpha - x^{(n)}|^k} = L$$

- Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = 1 + \frac{1}{2^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| 1 - \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \right|}{\left| 1 - \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) \right|^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{kn}}{2^{n+1}} = 2^{(k-1)n-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 1 \\ y_{n+1} = 1 + \frac{1}{3^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1 - y_n|}{|1 - x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0 \end{array} \right.$$



Test de parada

$$\left\{ x^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow \alpha$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y T^{mas}

Criterio de parada

Acotación del error

• Error absoluto

$$\left| \alpha - x^{(n)} \right| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \left| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right| < \varepsilon \rightarrow x^{(n)} = 1$$

• Error relativo

$$\left| \frac{\alpha - x^{(n)}}{\alpha} \right| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \left| \frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{x^{(n)}} \right| \neq 0?$$

• Valor absoluto de la función

$$\left| F(x^{(n)}) \right| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \left| F(x^{(n)}) \right| < \varepsilon$$

No hay una elección OPTIMA del test

$$\begin{aligned} F(x) &= (x-1)^{10} \\ \varepsilon &= 0.001 \\ x^{(n)} &= 1 + \frac{1}{n} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \left| F(x^{(n)}) \right| < \varepsilon \Rightarrow n \geq 2 \\ \left| \alpha - x^{(n)} \right| < \varepsilon \Rightarrow n \geq 1000 \end{cases}$$



Acotación del error (caso general)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

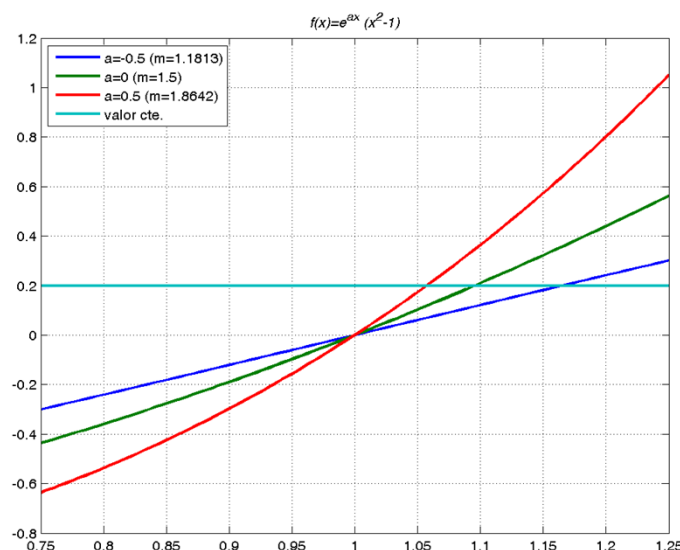
➤ Software

Definiciones y T^{mas}
Criterio de parada
Acotación del error

● Teorema

Sea la ecuación $F(x)=0$, donde $F(x)$ una función continua y derivable en $[a, b]$, α su raíz exacta y $x^{(n)}$ una aproximada, ambas situadas en el intervalo $[a,b]$, si $F'(x)$ tiene una cota inferior no nula m en todo el intervalo, la diferencia entre la solución real y la aproximada está acotada por $F(x)/m$

$$\left. \begin{array}{l} F(x) \in C^1[a, b] \\ \alpha \in [a, b] : F(\alpha) = 0 \\ \forall x \in [a, b] : |F'(\alpha)| \geq m \end{array} \right\} \Rightarrow |\alpha - x^{(n)}| \leq \left| \frac{F(x^{(n)})}{m} \right|$$



a	x	m	Cota
-0.5	1.1654	1.1813	0.1693
0.0	1.0954	1.5000	0.1333
0.5	1.0573	1.8642	0.1073



Bases

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Base Teórica

Bisección

Régula Falsi

Rég. Falsi Modificada

Müller

- Aplicación del Teorema de Bolzano.
- Proceso: disminuir en cada iteración el tamaño del intervalo en que se busca la raíz, hasta alcanzar la precisión deseada.
- Procedimiento:
 - $F(x)$ verifica Bolzano en $[a,b]$
 - Mientras no se cumpla el criterio de parada, repetir:
 - Generar un valor $x^{(n)}$ en $[a,b]$
 - Seleccionar el intervalo $[a, x^{(n)}]$ o $[x^{(n)}, b]$ que cumpla Bolzano
- Acotación

$$|b - a| = |b_0 - a_0| > |b_1 - a_1| > \cdots |b_n - a_n| : F(b_n)F(a_n) < 0$$

$$x^{(n)} \in [a_n, b_n] \Rightarrow |\alpha - x^{(n)}| \leq |b_n - a_n|$$



Bisección

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Base Teórica

Bisección

Régula Falsi

Rég. Falsi Modificada

Müller

- Considera sólo el signo de la función
- Toma el punto medio del intervalo
$$x^{(n)} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$
- Acotación $\left| \alpha - x^{(n)} \right| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$
 - ¿Cuántos terminos se necesitan para que el error sea menos que ε ?

$$n \geq \log_2 \frac{|b-a|}{\varepsilon}$$

- Ventajas: muy simple y $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$
- Inconvenientes: no usa información sobre la función

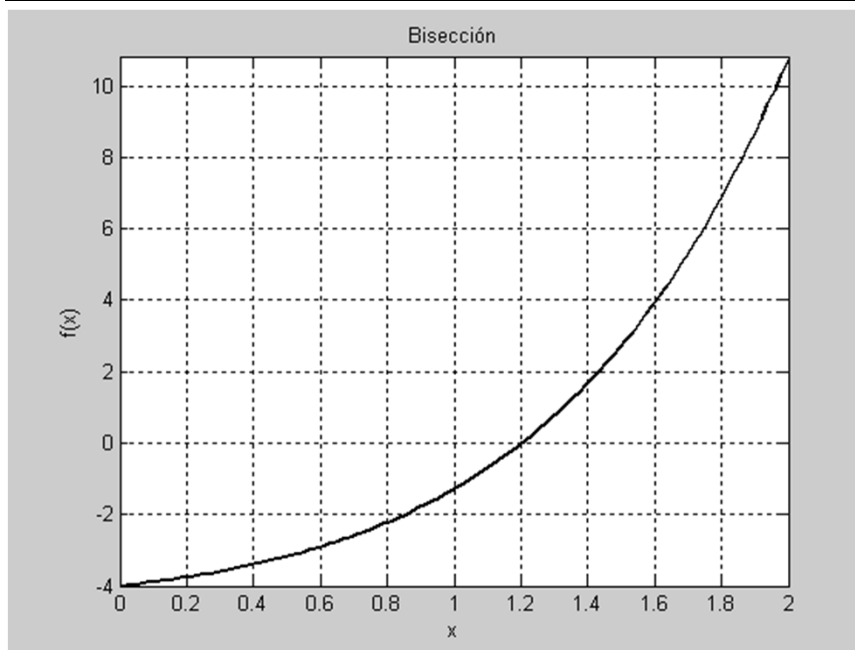


Bisección (Ejemplo) $F(x) = x \cdot e^x - 4$ $x^{(n)} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Base Teórica
Bisección
 Régula Falsi
 Rég. Falsi Modificada
 Müller

Iter	a	F(a)	b	F(b)	$x^{(n)}$	$f(x^{(n)})$
1	0.0000	-	2.0000	+	1.0000	-
2	1.0000	-	2.0000	+	1.5000	+
3	1.0000	-	1.5000	+	1.2500	+
4	1.0000	-	1.2500	+	1.1250	-
5	1.1250	-	1.2500	+	1.1875	-
:	:	:	:	:	:	:
11	1.2012	-0.0073	1.2031	+0.0070	1.2021	-0.0001



$$r = 1.202171326\ldots$$

$$\approx 1.2022$$



Regula Falsi

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Base Teórica

Bisección

Regula Falsi

Rég. Falsi Modificada

Müller

- Considera el valor de la función
- Toma una aproximación lineal $F(x) \approx P_1(x)$
$$x^{(n)} = a_n - F(a_n) \frac{b_n - a_n}{F(b_n) - F(a_n)} = b_n - F(b_n) \frac{b_n - a_n}{F(b_n) - F(a_n)}$$
- Ventajas: simple, convergencia superlineal $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Inconvenientes: $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$?

- **Teorema**

Sea $F(x)$ continua y derivable en $[a,b]$ tal que cambia de signo en los extremos y su derivada no se anula en todo el intervalo, y sean M y m el máximo y el mínimo respectivamente de $|F'(x)|$ en $[a,b]$, entonces el error del método de “Regula Falsi” viene acotado por

$$|\alpha - x^{(n)}| \leq \frac{M - m}{m} |x^{(n)} - x^{(n-1)}|$$



Regula Falsi (Ejemplo)

$$F(x) = x \cdot e^x - 4$$

$$x^{(1)} = a - F(a) \frac{b-a}{F(b)-F(a)} = 0 - (-4) \frac{2-0}{10.7781-(-4)} = 0.5413 \quad r = 1.202171326 \dots \approx 1.2022$$

$$x^{(2)} = 0.5413 - (-3.0698) \frac{2-0.5413}{10.7781-(-3.0698)} = 0.8647$$

$$x^{(3)} = 0.8647 - (-1.9470) \frac{2-0.8647}{10.7781-(-1.9470)} = 1.0384$$

$$x^{(4)} = 1.0384 - (-1.0668) \frac{2-1.0384}{10.7781-(-1.0668)} = 1.1250$$

Iter	a	F(a)	b	F(b)	$x^{(n)}$	$f(x^{(n)})$
1	0.0000	-4.0000	2.0000	+10.7781	0.5413	-3.0698
2	0.5413	-3.0698	2.0000	+10.7781	0.8647	-1.9470
3	0.8647	-1.9470	2.0000	+10.7781	1.0384	-1.0668
4	1.0384	-1.0668	2.0000	+10.7781	1.1250	-0.5347
5	1.1250	-0.5347	2.0000	+10.7781	1.1664	-0.2556
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
11	1.2014	-0.0053	2.0000	+10.7781	1.2018	-0.0024

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Base Teórica

Bisección

Regula Falsi

Rég. Falsi Modificada

Müller



Regula Falsi (Ejemplo II)

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

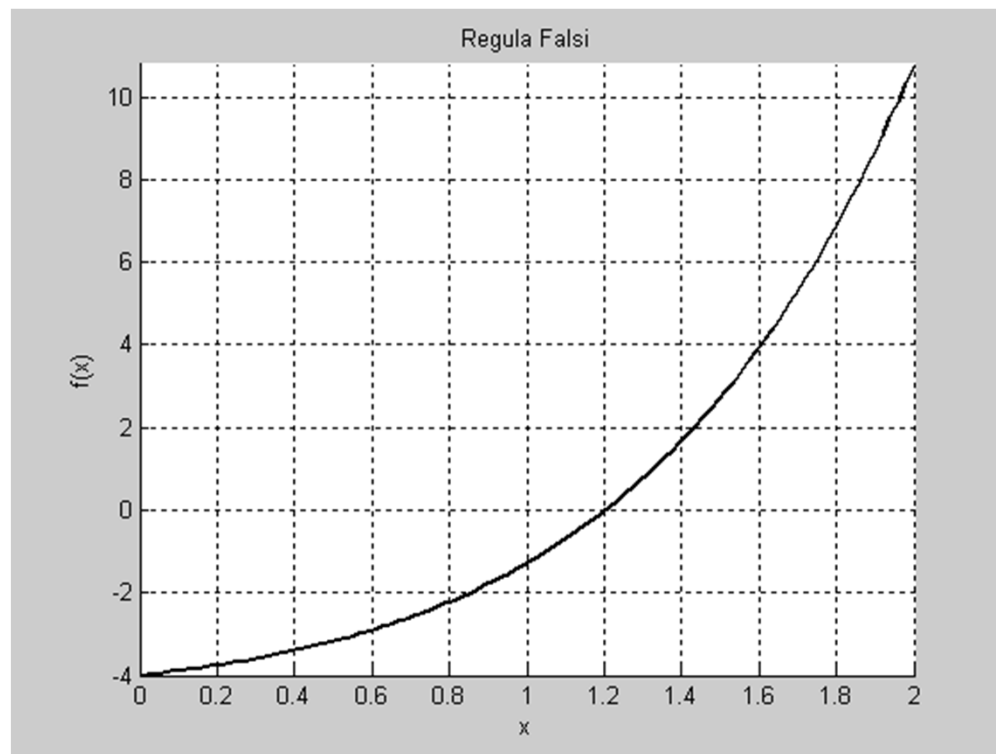
Base Teórica

Bisección

Regula Falsi

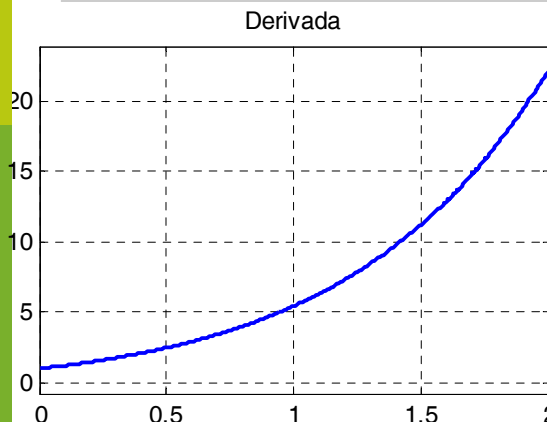
Rég. Falsi Modificada

Müller



$$Cota = \frac{M - m}{m} |x^{(n)} - x^{(n-1)}|$$

$$M \approx 22.17 \quad m = 1$$



Iter	x_{n+1}	x_n	$ \alpha - x^{(n)} $	Cota	$ b_n - a_n $
2	0.8647	0.5413	0.3375	6.8445	2.000
3	1.0384	0.8647	0.1638	3.6768	1.459
4	1.1250	1.0384	0.0772	1.8332	1.135
5	1.1664	1.1250	0.0358	0.8754	0.962
6	1.1857	1.1664	0.0165	0.4088	0.875
7	1.1946	1.1857	0.0076	0.1888	0.834



Régula Falsi Modificada

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Base Teórica

Bisección

Régula Falsi

Rég. Falsi Modificada

Müller

- **Objetivo:** $|b_n - a_n| \rightarrow 0$
 - Disminuir el intervalo por ambos lados
- **Método**
 - Cuando hay dos sustituciones consecutivas del intervalo por el mismo extremo, el valor de la función en el otro extremo se divide a la mitad.
- **Algoritmo**
 1. Asignar $fxn \leftarrow 0$; $fa \leftarrow F(a)$; $fb \leftarrow F(b)$
 2. Mientras que $|b-a| > \varepsilon$ ó $\text{criterio} > \varepsilon$, repetir Pasos 3-11
 3. Calcular $x^{(n)}$
 4. Si $F(x^{(n)})=0$ entonces Raiz_Exacta= $x^{(n)}$; FIN
 5. Si $F(x^{(n)}) \cdot fa > 0$ entonces
 1. $a = x^{(n)}$ y $fa = F(x^{(n)})$
 2. Si $fxn \cdot F(x^{(n)}) > 0$ disminuir la función en b: $fb = fb/2$
 6. Sino
 1. $b = x^{(n)}$ y $fb = F(x^{(n)})$
 2. Si $fxn \cdot F(x^{(n)}) > 0$ disminuir la función en a: $fa = fa/2$
 7. Hacer $fxn = F(x^{(n)})$



Regula Falsi Modificada (Ejemplo) $F(x) = x \cdot e^x - 4$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Base Teórica

Bisección

Régula Falsi

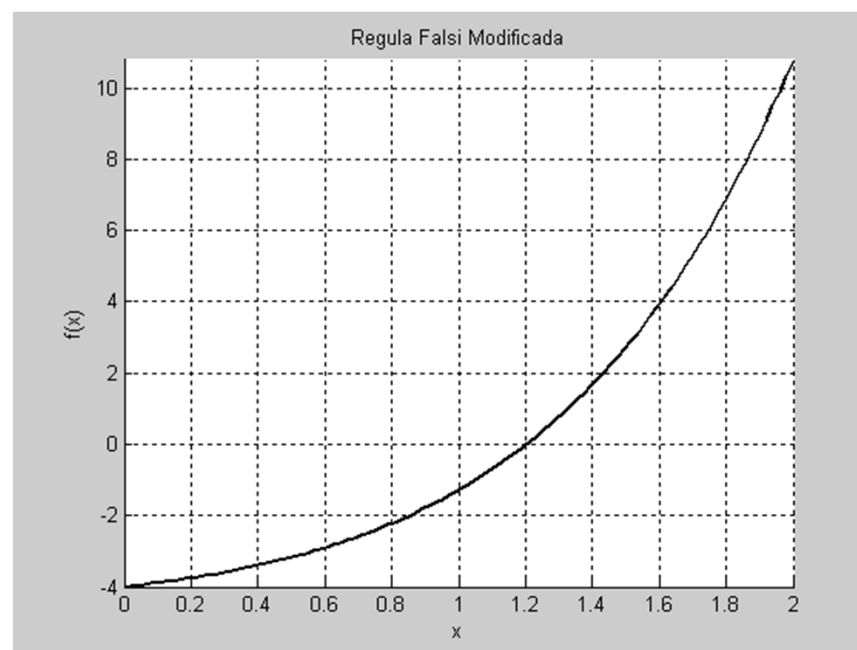
Rég. Falsi Modificada

Müller

Iter	a	F(a)	b	F(b)	$x^{(n)}$	$f(x^{(n)})$
1	0.0000	-4.0000	2.0000	+10.7781	0.5413	-3.0698
2	0.5413	-3.0698	2.0000	+10.7781	0.8647	-1.9470
3	0.8647	-1.9470	2.0000	+5.3891	1.1660	-0.2581
4	1.1660	-0.2581	2.0000	+2.6945	1.2389	+0.2766
5	1.1660	-0.2581	1.2389	+0.2766	1.2012	-0.0071
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8	1.2021	-0.0002	1.2022	+0.0002	1.2022	0.0000

$r = 1.202171326\dots$

≈ 1.2022





Müller

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Base Teórica
Bisección
Régula Falsi
Rég. Falsi Modificada
Müller

- Toma una aproximación cuadrática
$$F(x) \approx P_2(x)$$
- Procedimiento
 - Utilizar tres puntos (a,m,b) para calcular la parábola
 - Obtener la raíz r de la parábola que esta en el intervalo [a,b]
 - Si $r > m$ ($F(a)$ y $F(m)$ tienen el mismo signo) $\Rightarrow$ usar la terna (m,r,b)
 - Si $r < m$ ($F(b)$ y $F(m)$ tienen el mismo signo) $\Rightarrow$ usar la terna (a,r,m)
- Ventajas: convergencia superlineal: 1.85
- Inconvenientes: cálculos más complejos



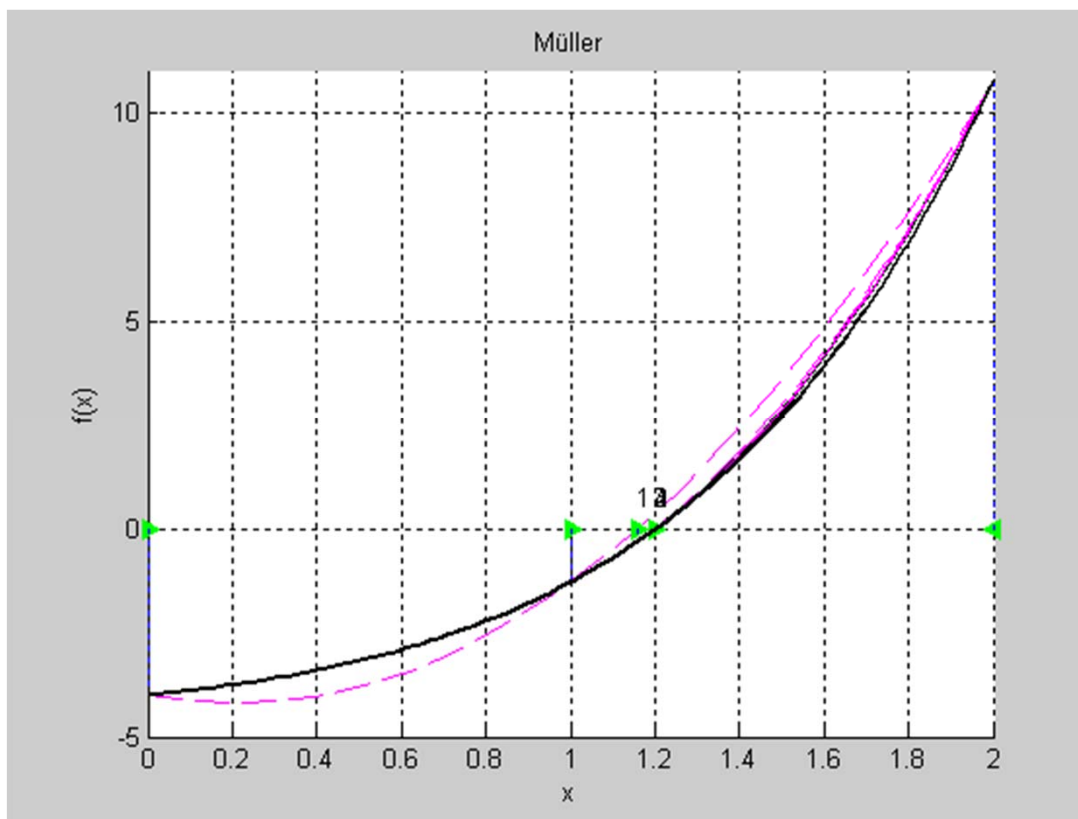
Müller (Ejemplo)

$$F(x) = x \cdot e^x - 4$$

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Base Teórica
 Bisección
 Régula Falsi
 Rég. Falsi Modificada
 Müller

Iter	a	F(a)	m	F(m)	b	F(b)	$x^{(n)}$	$f(x^{(n)})$
1	0.0000	-4.0000	1.0000	-1.2817	2.0000	10.7781	1.1577	-0.3153
2	1.0000	-1.2817	1.1577	-0.3153	2.0000	10.7781	1.1996	-0.0189
3	1.1577	-0.3153	1.1996	-0.0189	2.0000	10.7781	1.2021	-0.0003
4	1.1996	-0.0189	1.2021	-0.0003	2.0000	10.7781	1.2022	-2.3×10^{-7}





Métodos de punto fijo

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Teoría

Tma. Punto Fijo

Velocidad Convergencia

Acelera. Convergencia

● Definición

Sea $G(x)$ una función continua en $[a, b]$ y un punto c en $[a, b]$ tal que $G(c)=c$, entonces c se denomina punto fijo de $G(x)$.

● Justificación

- Transformar $F(x)$ en $G(x)=x$
- Obtener raíces de $F(x)$ “equivale” a calcular los puntos fijos de $G(x)$

● Problemas

- Existen infinitas transformaciones

$$F(x) + x^n = x^n \rightarrow x = \sqrt[n]{F(x) + x^n}$$

- ¿Todas las raíces de $F(x)$ son puntos fijos de $G(x)$? ¿y todos los puntos fijos de $G(x)$ son raíces de $F(x)$?

$$F(x) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{x+2} & x = 2 \\ x = -\sqrt{x+2} & x = -1 \end{cases}$$
$$x^2(x^2 - x - 2) \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{2}(x^4 - x^3)} & x = 2, 0 \\ x = -\sqrt{\frac{1}{2}(x^4 - x^3)} & x = -1, 0 \end{cases}$$



Existencia y unicidad de solución

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Definiciones y Tmas.

Tma. Punto Fijo

Velocidad Convergencia

Acelera. Convergencia

- **Teorema**

- Sea $G(x)$ una función continua en $[a, b]$ tal que $G(a) \geq a$ y $G(b) \leq b$, entonces $G(x)$ tiene uno o más puntos fijos en $[a, b]$.
- Si además $G'(x)$ está definida en (a, b) y existe una constante positiva $k < 1$ tal que para cualquier punto x del intervalo $|G'(x)| \leq k < 1$, entonces el punto fijo es único.

- **Procedimiento: Generar la sucesión $x^{(n+1)} = G(x^{(n)})$**

- **Notas**

- Condiciones suficientes, no necesarias

- Sea $G(x)$ una función continua en $[a, b]$ tal que $G(a) \leq a$ y $G(b) \geq b$, entonces $G(x)$ tiene uno o más puntos fijos en $[a, b]$.
- Si además $G'(x)$ está definida en (a, b) y existe una constante positiva $k < 1$ tal que para cualquier punto x del intervalo $|g'(x)| \geq k > 1$, entonces el punto fijo es único.



Contractividad (Opcional)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.

Tma. Punto Fijo

Velocidad Convergencia

Acelera. Convergencia

● Definición

- Una función $G(x)$ definida en $[a, b]$ se denomina contractiva cuando para cualquier par de puntos del intervalo la distancia entre las imágenes es menor que entre los puntos iniciales.

$$G(x):[a,b] \rightarrow \square \left\{ \begin{array}{l} \forall x_1, x_2 \in [a,b] \rightarrow |G(x_1) - G(x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \\ 0 \leq L < 1 \end{array} \right.$$

● Teorema:

$G(x) \in C^1[a,b]$ entonces $G(x)$ contractiva $\Leftrightarrow \forall x \in [a,b]: |G'(x)| < 1$

● Notas:

- Contractividad $\Rightarrow$ Continuidad

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon / L \text{ tal que } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < L |x - a| < \varepsilon$$

- Contractividad $\nRightarrow$ Derivabilidad

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor, x \in [-1, 1] \left\{ \begin{array}{l} \forall x_1, x_2 / x_1 \square x_2 > 0 \quad \left\| \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{4} \right\| \leq \left| \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{4} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{4} \\ \forall x_1, x_2 / x_1 \square x_2 < 0 \quad \left\| \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{4} \right\| \leq \left| \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} \right| \leq \left| \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{4} \right| \end{array} \right.$$

- Continuidad $\nRightarrow$ Contractividad

$$f(x) = 3x, x \in [-1, 1] / \forall x_1, x_2 : |3x_1 - 3x_2| > |x_1 - x_2|$$



Teorema de Punto fijo

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.

Tma. Punto Fijo

Velocidad Convergencia

Acelera. Convergencia

- **Teorema de punto fijo**

Si $g(x) \in C[a,b]$ y verifica:

1. $\forall x \in [a,b]: g(x) \in [a,b]$ (la imagen del intervalo esta en el intervalo)
2. $\exists k \in [0,1) / \forall x \in [a,b]: |g'(x)| \leq k < 1$ (función contractiva)
entonces la sucesión $\{x(n)\}$, generada mediante la relación $x(n) = g(x(n-1))$ converge para cualquier valor inicial $x(0)$ de $[a,b]$ al punto fijo α de $g(x)$.

- Corolario: bajo las condiciones anteriores se verifican las siguientes acotaciones

$$|\alpha - x_n| \leq k^n |\alpha - x_0| \quad |\alpha - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

[Demo](#)

- **Ventajas e inconvenientes del método**

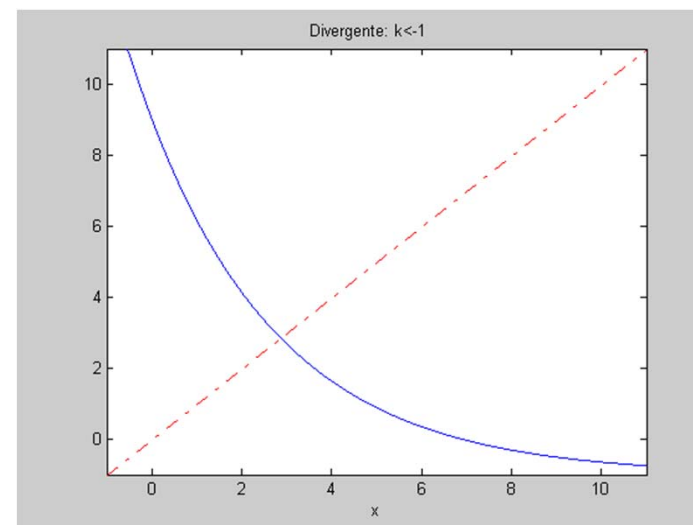
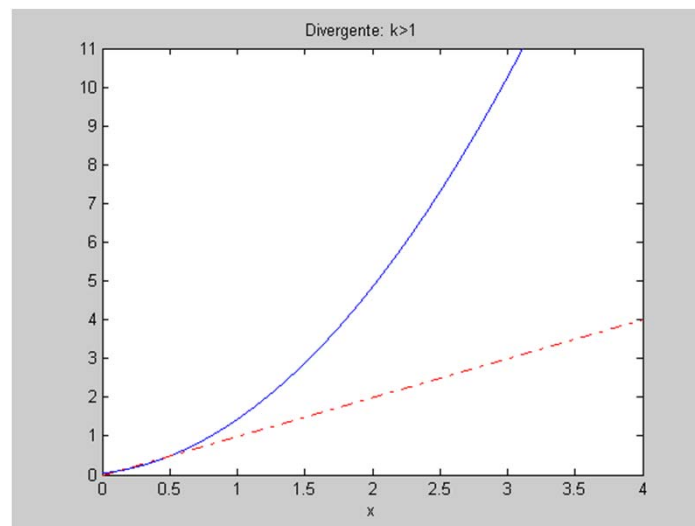
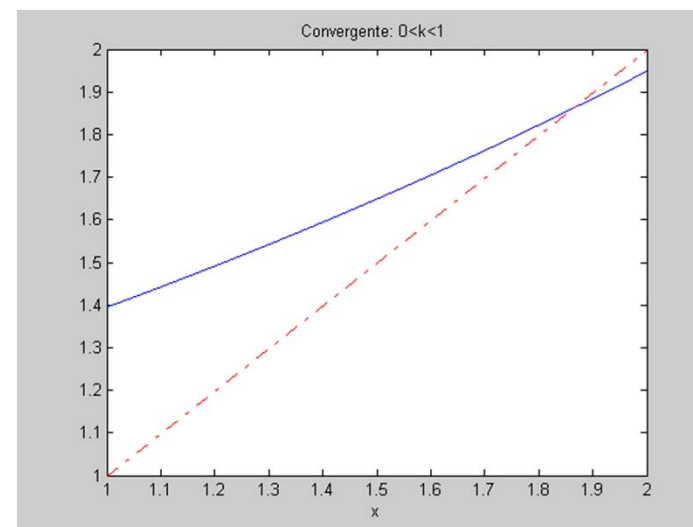
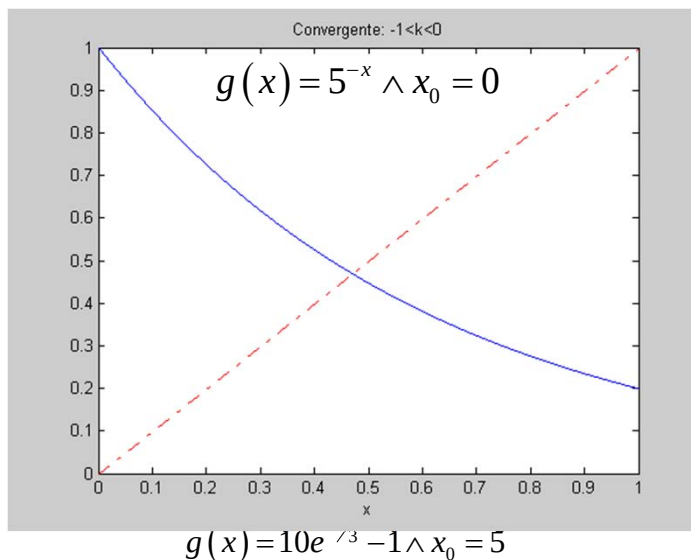
- Ventajas: Aplicable a raíces de cualquier orden
- Inconvenientes: Convergencia Lineal y encontrar la función que cumpla las condiciones del teorema



Ejemplos gráficos

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - **Mét. Iter. Funcional**
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Definiciones y Tmas.
Tma. Punto Fijo
Velocidad Convergencia
Acelera. Convergencia





Punto fijo (Ejemplo 1A) $F(x) = x \cdot e^x - 4$ en $[1, 2]$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.

Tma. Punto Fijo

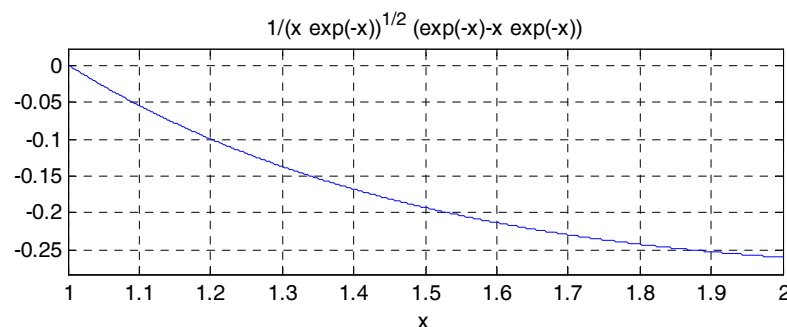
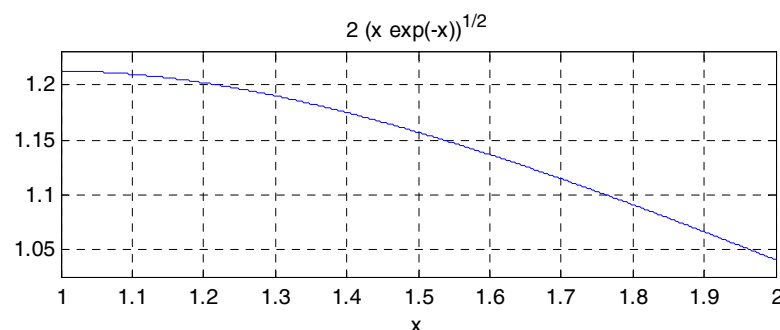
Velocidad Convergencia

Acelera. Convergencia

$$F(x) = x \cdot e^x - 4 = 0 \rightarrow g(x) = \frac{4}{e^x} \quad \boxed{\times}$$

$$F(x) = x \cdot e^x - 4 = 0 \rightarrow g(x) = \log\left(\frac{4}{x}\right) \quad \boxed{\times}$$

$$xF(x) = x^2 \cdot e^x - 4x = 0 \rightarrow g(x) = 2\sqrt{xe^{-x}} \quad \boxed{\checkmark}$$



n	x_n	x_n
0	1.0000	2.0000
1	1.2131	1.0405
2	1.2010	1.2126
3	1.2023	1.2011
4	1.2022	1.2023
5	1.2022	1.2022
6	1.2022	1.2022
7	1.2022	1.2022
8	1.2022	1.2022
9	1.2022	1.2022



Punto fijo (Ejemplo 1B) $F(x) = x \cdot e^x - 4$ en $[1, 2]$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.

Tma. Punto Fijo

Velocidad Convergencia

Acelera. Convergencia

● Estudio analítico

– Mapeo: $\forall x \in [a, b]: g(x) \in [a, b]$



$$g(x) = 2\sqrt{xe^{-x}} = 2\sqrt{\frac{x}{e^x}} \quad g'(x) = (e^{-x} - xe^{-x})(xe^{-x})^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{\sqrt{xe^{-x}}} = \frac{1-x}{\sqrt{xe^x}}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$g(1) = 2\sqrt{\frac{1}{e}} \approx 1.2131 \quad g(2) = 2\sqrt{\frac{2}{e^2}} \approx 1.0405 \quad \max_{x \in [1, 2]} g(x) \approx 1.2131 \quad \min_{x \in [1, 2]} g(x) \approx 1.0405$$

– Contractividad $\exists k \in [0, 1) / \forall x \in [a, b]: |g'(x)| \leq k < 1$



$$g'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{xe^x}} \quad g''(x) = \frac{1+2x-x^2}{2\sqrt{x^3e^x}}$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 1+2x-x^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \notin [1, 2]$$

$$g'(1) = 0 \quad g'(2) = -0.2601 \quad \max_{x \in [1, 2]} |g'(x)| \approx 0.2722$$



Velocidad de convergencia

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.

Tma. Punto Fijo

Velocidad Converg.

Acelera. Convergencia

- Nota: Si $G(x)$ verifica las condiciones de punto fijo en $[a,b]$, entonces $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow \alpha$

- Desarrollo de Taylor

$$G(x^{(n)}) = G(\alpha) + (x^{(n)} - \alpha) \frac{G'(\alpha)}{1!} + (x^{(n)} - \alpha)^2 \frac{G''(\alpha)}{2!} + \dots + (x^{(n)} - \alpha)^n \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots \rightarrow$$

$$\rightarrow x^{(n+1)} - \alpha = (x^{(n)} - \alpha) \frac{G'(\alpha)}{1!} + (x^{(n)} - \alpha)^2 \frac{G''(\alpha)}{2!} + \dots + (x^{(n)} - \alpha)^n \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots$$

- Si $G'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ Orden uno (convergencia lineal)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)} - \alpha}{x^{(n)} - \alpha} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{G'(\alpha)}{1!} + \dots + (x^{(n)} - \alpha)^{n-1} \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots \right| = G'(\alpha)$$

- Si $G'(\alpha) = 0$ y $G''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ Orden 2 (cuadrática)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)} - \alpha}{(x^{(n)} - \alpha)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{G''(\alpha)}{2!} + \dots + (x^{(n)} - \alpha)^{n-2} \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots \right| = \frac{G''(\alpha)}{2!}$$

- Si $G'(\alpha) = \dots = G^{(n-1)}(\alpha) = 0$ y $G^{(n)}(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ Orden n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)} - \alpha}{(x^{(n)} - \alpha)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots \right| = \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!}$$



Aceleración de la velocidad de convergencia

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Definiciones y Tmas.
Tma. Punto Fijo
Velocidad Convergencia
Acelera. Convergencia

● Método de Aitken:

- A partir de una función de punto fijo $G(x)$ con convergencia lineal genera otra sucesión con mayor velocidad de convergencia

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(n)} = G(x^{(n-1)}) \Big|_{n=0}^{\infty} \rightarrow \alpha \\ y^{(n)} = x^{(n)} - \frac{(\Delta x^{(n)})^2}{\Delta^2 x^{(n)}} \Big|_{n=0}^{\infty} \rightarrow \alpha \end{array} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - y^{(n)}}{\alpha - x^{(n)}} = 0$$

[Demo](#)

donde $\Delta x^{(n)} = x^{(n+1)} - x^{(n)}$ $\Delta^2 x^{(n)} = \Delta x^{(n+1)} - \Delta x^{(n)}$

- Inconvenientes: necesita almacenar dos sereis
- Solución (Método de Steffensen): combinar ambas

$$\left\{ \begin{array}{l} z^{(0)} \\ z^{(1)} = G(z^{(0)}) \\ z^{(2)} = G(z^{(1)}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nearrow z^{(3)} = z^{(0)} - \frac{(\Delta z^{(0)})^2}{\Delta^2 z^{(0)}} \\ z^{(4)} = G(z^{(3)}) \\ z^{(5)} = G(z^{(4)}) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \nearrow z^{(6)} = z^{(3)} - \frac{(\Delta z^{(3)})^2}{\Delta^2 z^{(3)}} \\ z^{(7)} = G(z^{(6)}) \\ z^{(8)} = G(z^{(7)}) \end{array} \right\} \dots$$



Aceleración

$$F(x) = x \cdot e^x - 4 \text{ en } [1, 2]$$

$$x^{(n+1)} = g(x^{(n)}) = 2\sqrt{x^{(n)}e^{-x^{(n)}}} \quad y^{(n)} = x^{(n)} - \frac{(\Delta x^{(n)})^2}{\Delta^2 x^{(n)}} = x^{(n)} - \frac{(x^{(n+1)} - x^{(n)})^2}{x^{(n+2)} - 2x^{(n+1)} + x^{(n)}}$$

n	$x^{(n)}$	$\Delta x^{(n)}$	$\Delta^2 x^{(n)}$	$y^{(n)}$
0	1.0000000000000000	2.1306×10^{-1}	-2.2508×10^{-1}	1.20168447570198
1	1.213061319425267	-1.2019×10^{-2}	1.3257×10^{-2}	1.20216562399164
2	1.201042717963047	1.2386×10^{-3}	-1.3636×10^{-3}	1.20216784955552
3	1.202281350239381	-1.2495×10^{-4}	1.3758×10^{-4}	1.20216787295619
4	1.202156399867930	1.2633×10^{-5}	-1.3910×10^{-5}	1.20216787319458
5	1.202169032939500	-1.2770×10^{-6}	1.4061×10^{-6}	1.20216787319702

n	$\Delta z^{(n)}$	$\Delta^2 z^{(n)}$	$z^{(n)}$
0-2			$x^{(n)}$
3	2.1306×10^{-1}	-2.2508×10^{-1}	1.201684475701979
4			1.202216689302744
5			1.202162938187486
6	5.3221×10^{-4}	-5.8596×10^{-4}	1.202167868829746
7			1.202167873638506
8			1.202167873152418
9	4.8088×10^{-9}	-5.2948×10^{-9}	1.202167873197043

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.

Tma. Punto Fijo

Velocidad Convergencia

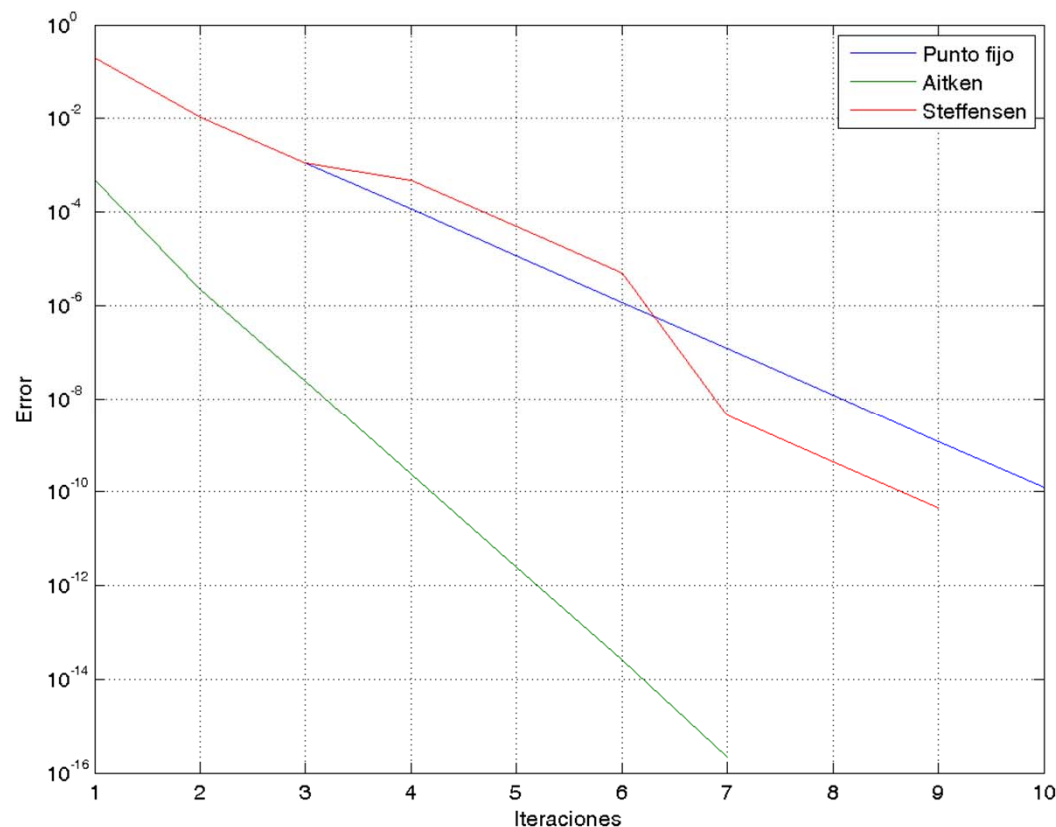
Acelera. Convergencia



Aceleración: Comparativa $F(x) = x \cdot e^x - 4$ en $[1, 2]$

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - **Mét. Iter. Funcional**
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Definiciones y Tmas.
Tma. Punto Fijo
Velocidad Convergencia
Acelera. Convergencia





Origen

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Interpretación

Tma. de Convergencia

Convergencia Cúbica

Secante, Müller, ...

- Encontrar un método con velocidad cuadrática $F(x) = 0 \rightarrow G(x) = x - F(x)\phi(x)$
- Planteamiento:
 1. ¿Condiciones $\phi(x)$?
$$G'(x) = 1 - F'(x)\phi(x) - F(x)\phi'(x)$$
$$G'(\alpha) = 0 \rightarrow \phi(\alpha) = \frac{1}{F'(\alpha)}$$
- Método de Newton
$$G(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} \rightarrow x^{(n+1)} = G(x^{(n)}) = x^{(n)} - \frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})}$$
- Ventajas: velocidad cuadrática (casi siempre)
- Inconvenientes: cálculo de $F'(x)$, derivada nula, intervalo y condiciones de convergencia



Justificaciones

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General
- Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Interpretación

Tma. de Convergencia
Convergencia Cúbica
Secante, Müller, ...

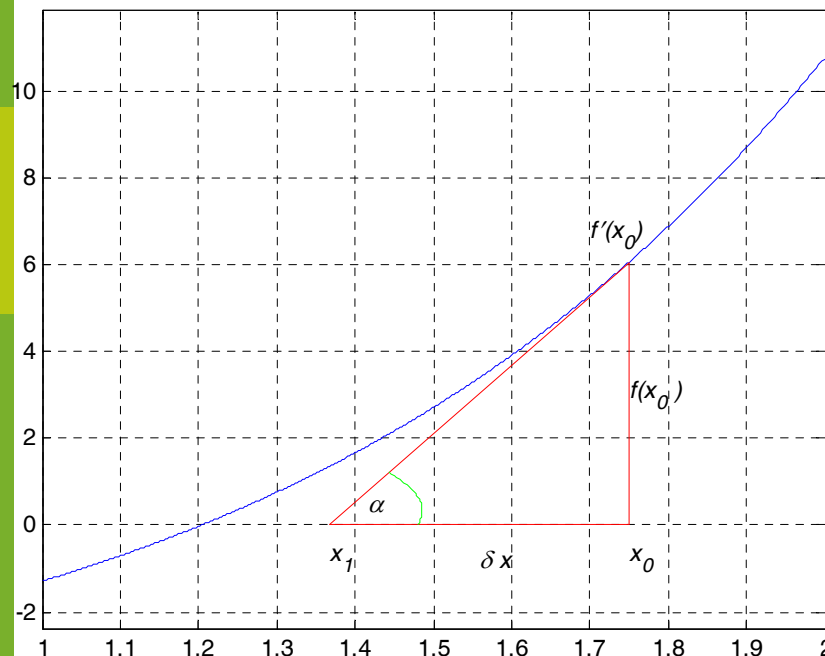
● Desarrollo de Taylor “cerca” de la raíz

$$F(\alpha) = F(x) + (\alpha - x) \frac{F'(x)}{1!} + \dots + (\alpha - x)^n \frac{F^{(n)}(x)}{n!} + \dots \xrightarrow{|\alpha - x|^2 \ll |\alpha - x|}$$

$$\rightarrow 0 \approx F(x) + (\alpha - x) \frac{F'(x)}{1!} \Rightarrow \alpha \approx x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

● Justificación gráfica

Método de Newton



$$\tan(\alpha) = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{\delta x}$$

$$x_1 = x_0 - \delta x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Condiciones de convergencia global

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Interpretación

Tma. de Convergencia

Convergencia Cúbica

Secante, Müller, ...

● Teorema

Sea $F(x) \in C^2[a,b]$ tal que

1. $F(a) \cdot F(b) < 0$

2. $F'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

3. $F''(x)$ no cambia de signo $\forall x \in [a,b]$

4.
$$\max \left\{ \left| \frac{F(a)}{F'(a)} \right|, \left| \frac{F(b)}{F'(b)} \right| \right\} \leq |b - a|$$

entonces la sucesión generada por el método de Newton converge a α para cualquier selección inicial de $x_0 \in [a,b]$

● Notas

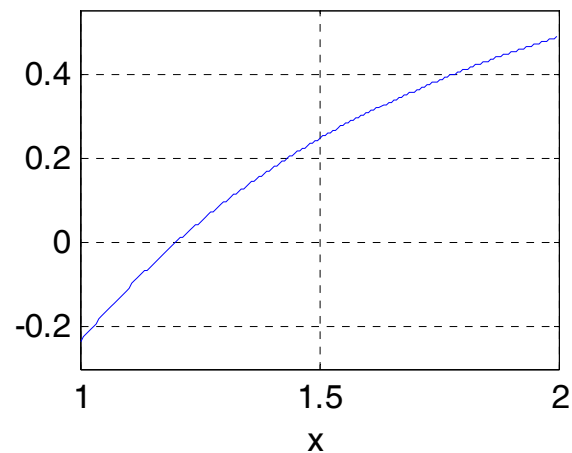
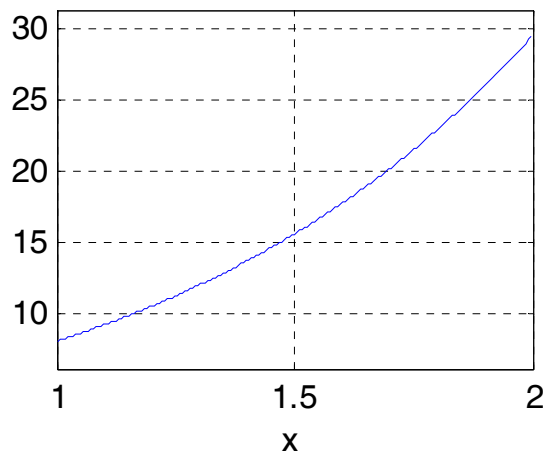
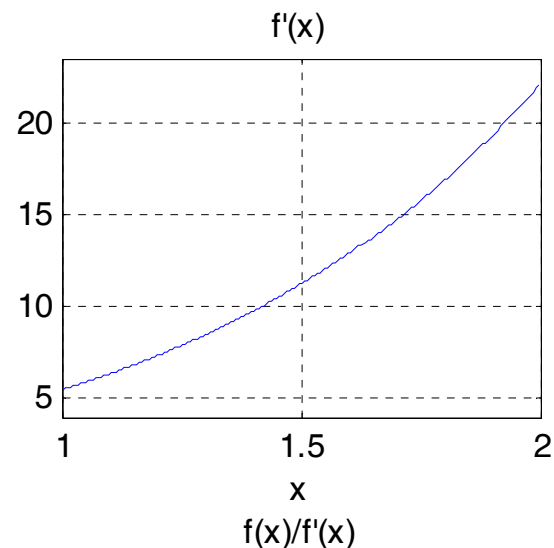
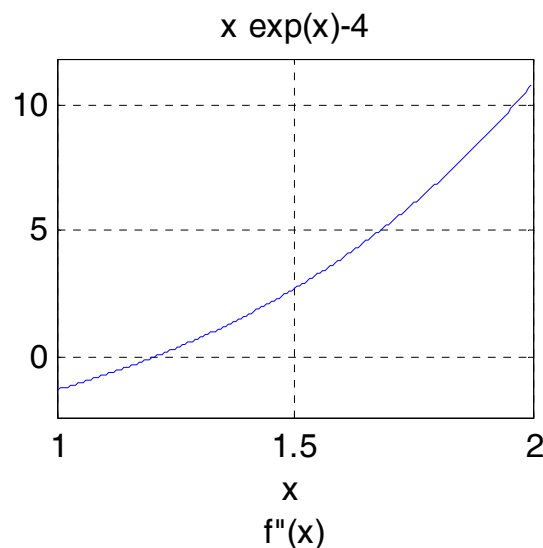
- Condición 4 asegura la permanencia en el intervalo
- Suficientes 1-3 eligiendo el extremo con $F(x)F''(x) > 0$
- Condiciones suficientes, no necesarias.



Newton (Ej. Condiciones) $F(x) = x \cdot e^x - 4$ en $[1, 2]$

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Interpretación
Tma. de Convergencia
Convergencia Cúbica
Secante, Müller, ...





Newton (Ej. Iteraciones) $F(x) = x \cdot e^x - 4$ en $[1, 2]$

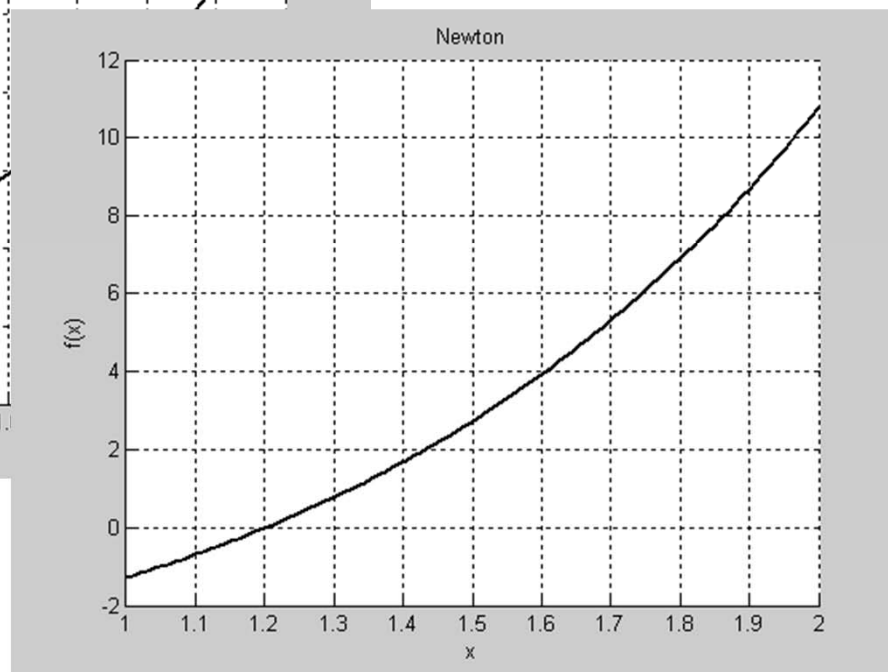
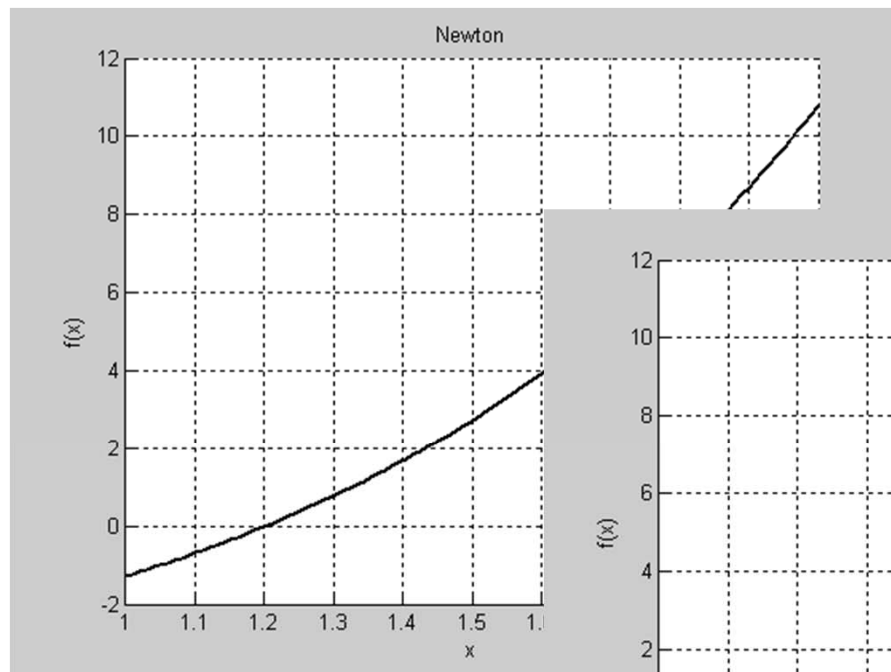
- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Interpretación

Tma. de Convergencia

Convergencia Cúbica

Secante, Müller, ...



n	x_n	x_n
01	1.0000	2.0000
02	1.2358	1.5138
03	1.2030	1.2618
04	1.2022	1.2047
05	1.2022	1.2022



Métodos con convergencia cúbica (opcional)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Interpretación

Tma. de Convergencia

Convergencia Cúbica

Secante, Müller, ...

- Halley
$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{2F(x^{(n)})\left(F'(x^{(n)})\right)^2}{2\left(F'(x^{(n)})\right)^3 - F(x^{(n)})F''(x^{(n)})}$$
- Householder
$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})} - \frac{F''(x^{(n)})}{2F'(x^{(n)})} \left(\frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})} \right)^2$$
- Aslam Noor
 - Predictor
$$y^{(n)} = x^{(n)} - \frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})} \wedge z^{(n)} = -\frac{F''(x^{(n)})}{2F'(x^{(n)})} (y^{(n)} - x^{(n)})^2 \quad F'(x^{(n)}) \neq 0$$
 - Corrector
$$x^{(n+1)} = y^{(n)} - \frac{F''(x^{(n)})}{2F'(x^{(n)})} (y^{(n)} + z^{(n)} - x^{(n)})^2$$
 - Predictor
$$y^{(n)} = x^{(n)} - \frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})} \wedge z^{(n)} = F'(x^{(n)}) \left[1 + \frac{F(x^{(n)})^2}{F(y^{(n)})} \right] \quad F'(x^{(n)}) \neq 0$$
 - Corrector
$$x^{(n+1)} = y^{(n)} - z^{(n)} \frac{F(y^{(n)})}{F'(x^{(n)})} - (z^{(n)})^2 \frac{F^2(y^{(n)})}{F(x^{(n)})F'(x^{(n)})}$$



Variaciones del método de Newton

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Interpretación

Tma. de Convergencia

Convergencia Cúbica

Secante, Müller, ...

- Withaker
 - Hace una derivación aproximada para evitar el cálculo de la derivada

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)h}{F(x_n + h) - F(x_n)}$$

- Problemas de estabilidad numérica
- Secante
 - Aproxima la derivada por la secante en dos puntos sucesivos.
 - No se puede tratar como un método de punto fijo
 - Velocidad de convergencia superlineal
 - Al ser una recta, la actualización de valores tiene una fórmula similar a la de “Regula Falsi”

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})}$$





Müller funcional

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Interpretación

Tma. de Convergencia

Convergencia Cúbica

Secante, Müller, ...

- También toma una aproximación cuadrática
- Procedimiento
 - Utilizar tres puntos (x_0, x_1, x_2) para calcular la parábola $P_2(x) = ax^2 + bx + c$
 - Obtener las raíces r de la parábola

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

- tomar aquella en que ambos términos del denominador tienen el mismo signo
 - Tomar como nueva terna (x_1, x_2, r)
- Ventajas: convergencia superlineal: 1.85
- Inconvenientes: cálculos más complejos



Raíces múltiples

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

● ¡La convergencia deja de ser cuadrática!

- $F(x)$ tiene una raíz α de multiplicidad n

$$f(x) = (x - \alpha)^n h(x) : h(\alpha) \neq 0 \rightarrow g'(\alpha) = 1 - \frac{1}{n}$$

[Demo](#)

● Soluciones alternativas

- Si se conoce la multiplicidad $G(x) = x - n \frac{F(x)}{F'(x)}$

- Si no se conoce $G(x) = x - \frac{\psi(x)}{\psi'(x)}$

Donde $\psi(x)$ es una función que tiene las mismas raíces que $F(x)$, pero simples, y se obtiene mediante

$$\psi(x) = \frac{F(x)}{F'(x)}$$

[Demo](#)



Ventajas en inconvenientes

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

- Métodos de intervalo
 - Exigen las condiciones del teorema de Bolzano
 - Sólo son válidos para encontrar raíces simples
 - Acotan el error de la raíz y no sólo el de la función
 - La longitud del intervalo “suele” tender a cero
 - Velocidades de convergencia lineales y superlineales
- Métodos de iteración funcional
 - Exigen las condiciones de punto fijo.
 - Puede ser complicado encontrar la función que las verifique
 - Son válidos para raíces de cualquier multiplicidad
 - No acotan directamente el error de la raíz
 - Velocidades de convergencia lineales y superiores
 - Hay métodos para acelerar la velocidad



Características

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Nombre	Tipo	Orden	Descripción
Bisección	Intervalo	Lineal	Punto medio
R. Falsi	Intervalo	Superlineal	Aproximación lineal a la raíz
Müller	Intervalo	Superlineal	Aproximación parabólica a la raíz
P.Fijo	Funcional	Lineal o superior	
Newton	Funcional	Cuadrática (lineal)	Tangentes a la curva
Secante	Funcional	Superlineal	Secantes a la curva
Müller	Funcional	Superlineal	Aproximación parabólica a la raíz



Ecuaciones polinómicas

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General
- Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.

Acotación de raíces

Separación de raíces

Métodos específicos

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- T^{ma} fundamental del Álgebra
 - Una ecuación polinómica de grado n tiene exactamente n raíces (reales o complejas), considerando que cada raíz cuenta de acuerdo con su multiplicidad.
- Identificar y acotar las mismas
 - ¿cuántas son reales y cuantas complejas?
 - ¿cuántas hay positivas?
 - ¿en que intervalo están las raíces reales?
 - ¿cuál es el máximo módulo de las raíces complejas?
 - Etc.
- Derivar polinomios

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - \alpha) + R \rightarrow P_n(\alpha) = R$$

$$P'_n(x) = P'_{n-1}(x)(x - \alpha) + P_{n-1}(x) \rightarrow P'_n(\alpha) = P_{n-1}(\alpha)$$

$$P''_n(x) = P''_{n-1}(x)(x - \alpha) + P'_{n-1}(x) \rightarrow P''_n(\alpha) = P'_{n-1}(\alpha)$$



Acotación I

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.

Acotación de raíces

Separación de raíces

Métodos específicos

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Los módulos de todas las raíces r_n de $P_n(x)$ satisfacen la desigualdad

$$|r_k| < 1 + \frac{\max_i |a_i|}{|a_n|}$$

- Sea $P_n(x)$ donde $a_n > 0$, y sean a_k el coeficiente negativo de mayor grado y B el coeficiente negativo mayor en valor absoluto, entonces las raíces positivas de $P_n(x)$ satisfacen la desigualdad

$$|r_i| < 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}}$$

- Ejemplo $P_n(x) = (x+7)(x+2)(x-3)(x-4)(x-5)^2 =$
 $= x^6 - 8x^5 - 32x^4 + 430x^3 - 857x^2 - 1430x + 4200$

$$|r_k| < 1 + \frac{\max_i |a_i|}{|a_n|} = 1 + \frac{4200}{1} = 4201 \quad |r_i| < 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[6-5]{\frac{1430}{1}} \approx 1431$$



Acotación II

Una obtenida una cota superior de las raíces reales positivas, se hallan las cotas del resto de las raíces (suponiendo que existan) mediante las relaciones

		entonces	es cota	de las raíces	
Si R es cota superior de	$P_n(-x)$	$-R$	inferior	negativas	de $P_n(x)$
	$x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right)$	$1/R$	inferior	positivas	
	$x^n P_n\left(\frac{-1}{x}\right)$	$-1/R$	superior	negativas	

$$P_n(-x) = x^6 + 8x^5 - 32x^4 - 430x^3 - 857x^2 + 1430x + 4200 \quad |r_i| < 1 + \sqrt[2]{\frac{857}{1}} \approx 30.27$$

$$x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - 8x - 32x^2 + 430x^3 - 857x^4 - 1430x^5 + 4200x^6 \quad |r_i| < 1 + \sqrt[1]{\frac{1430}{4200}} \approx 1.34$$

$$x^n P_n\left(\frac{-1}{x}\right) = 1 + 8x - 32x^2 - 430x^3 - 857x^4 + 1430x^5 + 4200x^6 \quad |r_i| < 1 + \sqrt[2]{\frac{857}{4200}} \approx 1.45$$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.

Acotación de raíces

Separación de raíces

Métodos específicos



Acotación III

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General
- Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.

Acotación de raíces

Separación de raíces

Métodos específicos

● Regla de Laguerre Thibault

Condición suficiente para que $R > 0$ sea una cota superior de las raíces positivas de $P(x)=0$ es que los coeficientes y el resto de dividir $P(x)$ por $(x-R)$ sean no negativos o no positivos

	1	-8	-32	430	-857	-1430	4200
10		10	20	-120	3100	22430	210000
	1	2	-12	310	2243	21000	214200
	1	-8	-32	430	-857	-1430	4200
11		11	33	11	4851	43934	467544
	1	3	1	441	3994	42504	471744

11 es una cota superior de las raíces del polinomio



Acotación IV

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General
- Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.
Acotación de raíces
Separación de raíces
Métodos específicos

● Regla de Newton

Condición suficiente para que $R > 0$ sea una cota superior de las raíces positivas de $P(x) = 0$ es la evaluación del polinomio y sus derivadas en R sean no negativos o no positivos

$P_n(7)$	1	-8	-32	430	-857	-1430	4200
7		7	-7	-273	1099	1694	1848
$P'_n(7)$	1	-1	-39	157	242	264	6048
7		7	42	21	1246	10416	
$P''_n(7)$	1	6	3	178	1488	10680	
7		7	91	658	5852		
$P'''_n(7)$	1	13	94	836	7340		
7		7	140	1638			
$P_n^{(iv)}(7)$	1	20	234	2474			
7		7	189				
$P_n^{(v)}(7)$	1	27	423				
7		7					
$P_n^{(vii)}(7)$	1	34					

7 es una cota superior de las raíces positivas del polinomio



Separación I

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.
Acotación de raíces
Separación de raíces
Métodos específicos

• Regla de Descartes

El número de raíces reales positivas (contada cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad) de un polinomio es igual o inferior en un número par al de cambios de signo de sus coeficientes

• Variación de signo

Se dice que el conjunto finito de números reales $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ presenta una variación de signo, si dos términos consecutivos tienen signos opuestos. El número de variaciones del conjunto se denotará por $V(a_0, a_1, \dots, a_n)$

• Teorema de Boudan-Fourier

El número de raíces reales iguales o distintas del polinomio $P(x)$ en el intervalo (a, b) siendo $P(a) \cdot P(b) \neq 0$ es igual o inferior en un número par a las variaciones de signo del polinomio y sus derivadas en ambos extremos, esto es, $|V(P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)) - V(P(b), \dots, P^{(n)}(b))|$

$$P_6(x) = (x+7)(x+2)(x-3)(x-4)(x-5)^2 = \\ = x^6 - 8x^5 - 32x^4 + 430x^3 - 857x^2 - 1430x + 4200$$

$$V_{P_6} = 4 \leftarrow \{1, -8, -32, +430, -857, -1430, +4200\}$$

$$V = \{P_6(x), P_6'(x), P_6''(x), P_6'''(x), P_6^{(iv)}(x), P_6^{(v)}(x), P_6^{(vi)}(x)\}$$

$$x = 2 \rightarrow \{648, -1170, 555, 14, -52, 4, 1\} \rightarrow V\{a\} = 4$$

$$x = 7 \rightarrow \{6048, 10680, 7340, 2474, 423, 34, 1\} \rightarrow V\{b\} = 0$$



Separación II

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.
Acotación de raíces
Separación de raíces
Métodos específicos

• Teorema de Hua

En una ecuación polinómica de coeficientes reales y raíces reales se cumple que el cuadrado de cada coeficiente no extremo es mayor que el producto de los coeficientes adyacentes

• Corolario: si se tiene $a_k a_{k-2} \geq a_{k-1} a_{k+1}$ la ecuación tiene al menos dos raíces complejas

• Encontrar polinomio con las mismas raíces, pero simples

$$P_n(x) = \alpha (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} (x - x_3)^{k_3} \cdots (x - x_m)^{k_m} \rightarrow n = \sum_{i=1}^m k_i$$

$$P'_n(x) = \alpha (x - x_1)^{k_1-1} (x - x_2)^{k_2-1} (x - x_3)^{k_3-1} \cdots (x - x_m)^{k_m-1} Q(x) / Q(x_i) \neq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$R(x) = \alpha (x - x_1)^{k_1-1} (x - x_2)^{k_2-1} (x - x_3)^{k_3-1} \cdots (x - x_m)^{k_m-1} \text{ es m.c.d.}(P_n(x), P'_n(x))$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{P_n(x)}{R(x)} \text{ mismas raíces pero simples}$$

Métodos

Polinomios de Sturm (Algoritmo de Euclides)



Separación III

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

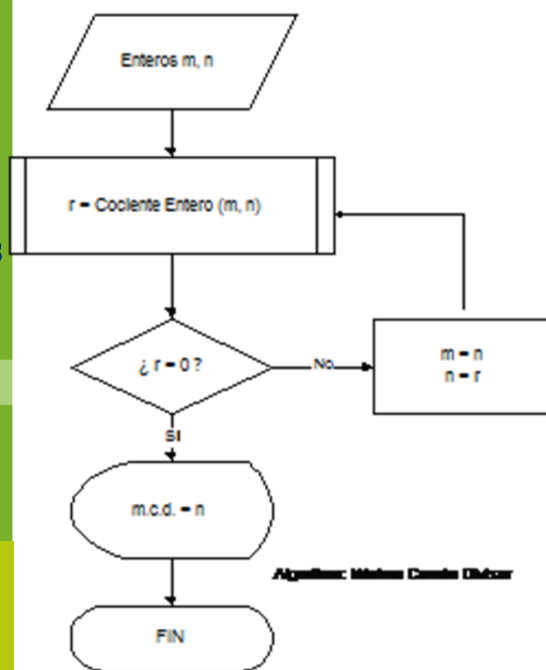
- Introducción
- Mét. Intervalo
- Mét. Iter. Funcional
- Mét. Newton y otros
- Raíces Múltiples
- Resumen General
- Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

Definiciones y Tmas.
Acotación de raíces
Separación de raíces
Métodos específicos

• Algoritmo de Euclides (m.c.d.) $D(x) = d(x)c(x) + r(x)$



$$D(x) = 3(x+3)^2(x-1)^3(x-4) = 3x^6 - 3x^5 - 54x^4 + 42x^3 + 183x^2 - 279x + 108$$

$$d(x) = 18x^5 - 15x^4 - 216x^3 + 126x^2 + 366x - 279$$

$$D(x) = d(x)\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{36}\right) + \left(\frac{-221}{12}x^4 + 15x^3 + \frac{251}{2}x^2 - \frac{667}{3}x + \frac{401}{4}\right)$$

$$D(x) = 18x^5 - 15x^4 - 216x^3 + 126x^2 + 366x - 279$$

$$d(x) = \frac{-221}{12}x^4 + 15x^3 + \frac{251}{2}x^2 - \frac{667}{3}x + \frac{401}{4}$$

$$D(x) = d(x)\left(\frac{-216}{221}x + \frac{239}{12970}\right) + \left(\frac{-19004}{203}x^3 - \frac{19004}{203}x^2 + \frac{17787}{38}x - \frac{20221}{72}\right)$$

$$D(x) = \frac{-221}{12}x^4 + 15x^3 + \frac{251}{2}x^2 - \frac{667}{3}x + \frac{401}{4}$$

$$d(x) = \frac{-19004}{203}x^3 - \frac{19004}{203}x^2 + \frac{17787}{38}x - \frac{20221}{72}$$

$$D(x) = d(x)\left(\frac{673}{3421}x - \frac{136}{381}\right) + (0)$$

$$Q(x) = \frac{P_n(x)}{R(x)} = \frac{3x^6 - 3x^5 - 54x^4 + 42x^3 + 183x^2 - 279x + 108}{\frac{-19004}{203}x^3 - \frac{19004}{203}x^2 + \frac{17787}{38}x - \frac{20221}{72}} =$$

$$= \frac{3(x+3)^2(x-1)^3(x-4)}{\frac{-19004}{203}(x+3)(x-1)^2} = \frac{-190}{5929}x^3 + \frac{229}{3573}x^2 + \frac{190}{539}x - \frac{458}{1191}$$



Métodos específicos para raíces polinómicas

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Definiciones y Tmas.
Acotación de raíces
Separación de raíces
Métodos específicos

- Método de Birge-Vietta
 - Es el método de Newton particularizado para polinomios (división sintética)
- Método de Bairstow
 - Obtiene factores cuadráticos.
- Método QD
 - Obtiene una aproximación a todas las raíces sin realizar la división sintética
- Método de Lobachesky-Greaffe
 - Utiliza la elevación al cuadrado de la raíz para obtener raíces reales separadas y “complejas”
- Método de Bernuilli
 - Obtiene la raíz real de mayor módulo



Birge-Vietta

- **Motivación**
- **Objetivos**
- **Temario**
 - **Introducción**
 - **Mét. Intervalo**
 - **Mét. Iter. Funcional**
 - **Mét. Newton y otros**
 - **Raíces Múltiples**
 - **Resumen General**
 - **Caso Polinómico**
- **Bibliografía**
- **Software**

Definiciones y Tmas.
Acotación de raíces
Separación de raíces
Métodos específicos



Bairstow

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Definiciones y Tmas.
Acotación de raíces
Separación de raíces
Métodos específicos



QD

- **Motivación**
- **Objetivos**
- **Temario**
 - **Introducción**
 - **Mét. Intervalo**
 - **Mét. Iter. Funcional**
 - **Mét. Newton y otros**
 - **Raíces Múltiples**
 - **Resumen General**
 - **Caso Polinómico**
- **Bibliografía**
- **Software**

Definiciones y Tmas.
Acotación de raíces
Separación de raíces
Métodos específicos



Lobachesky-Greaffe

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Definiciones y Tmas.
Acotación de raíces
Separación de raíces
Métodos específicos



Bernuilli

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

Definiciones y Tmas.
Acotación de raíces
Separación de raíces
Métodos específicos



Bibliografía comentada

- **Motivación**
- **Objetivos**
- **Temario**
 - **Introducción**
 - **Mét. Intervalo**
 - **Mét. Iter. Funcional**
 - **Mét. Newton y otros**
 - **Raíces Múltiples**
 - **Resumen General**
 - **Caso Polinómico**
- **Bibliografía**
- **Software**

Definiciones y Tmas.
Acotación de raíces
Separación de raíces
Métodos específicos



Software: Instrucciones de Matlab y Octave

- **Motivación**
- **Objetivos**
- **Temario**
 - **Introducción**
 - **Mét. Intervalo**
 - **Mét. Iter. Funcional**
 - **Mét. Newton y otros**
 - **Raíces Múltiples**
 - **Resumen General**
 - **Caso Polinómico**
- **Bibliografía**
- **Software**

Operación	Matlab	Octave
Resolución de una ecuación no lineal definida como función numérica mediante métodos de intervalo	fzero	fzero
Resolución de una ecuación no lineal definida como función simbólica mediante métodos analíticos	solve	
Define los parámetros de resolución de la ecuación no lineal	optimset	optimset
Multiplicar polinomios	conv	conv
Obtener las raíces de un polinomio	roots	roots
División de polinomios	deconv	deconv
Obtener un polinomio con raíces específicas	poly	Poly
Evalúa un polinomio en un punto	polyval	Polyval
Evalúa un polinomio matricial	polyvalm	Polyvalm
Convierte entre una expansión en fracciones parciales y los coeficientes del polinomio	residue	residue



Anexos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Introducción

➤ Mét. Intervalo

➤ Mét. Iter. Funcional

➤ Mét. Newton y otros

➤ Raíces Múltiples

➤ Resumen General

➤ Caso Polinómico

➤ Bibliografía

➤ Software

- Demostraciones y desarrollos



Demostración Teoremas

➤ Motivación

📁 Descripción

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

📁 Ejercicios

📁 Bibliografía

• Teorema I

$$F(x) \in C[a, b] / F(a) \cdot F(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b] / F(c) = 0$$

Hipótesis : sean $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ y $c = \frac{1}{2}(a + b)$

si $F(c) = 0$ c.q.d.

sino $F(c) > 0$ se repite con el intervalo $[a, c]$

ó $F(c) < 0$ se repite con el intervalo $[c, b]$

[Volver](#)

• Teorema II

$$F(x) \in C^1(a, b) / F(a) \cdot F(b) < 0 \wedge \forall x \in (a, b) : F'(x) \neq 0 \Rightarrow \exists! c \in [a, b] / F(c) = 0$$

Hipótesis : $\exists c_1 \neq c_2 : F(c_1) = F(c_2) = 0$

$$0 = F(c_1) - F(c_2) \stackrel{TVM}{=} F'(\zeta)(c_1 - c_2) \neq 0 \Rightarrow \text{Absurdo} \rightarrow \text{Hipótesis Errónea}$$

[Volver](#)

• Teorema III

$$F(x) \in C^1[a, b] / \exists c_1 < c_2 : F'(c_1) = F'(c_2) = 0 \wedge \forall x \in (c_1, c_2) : F'(x) \neq 0$$

$\Rightarrow F(x)$ tiene 0 o 1 raíz en $[c_1, c_2]$

$$\text{Hipótesis : } \exists x_1 \neq x_2 \in [c_1, c_2] : F(x_1) = F(x_2) = 0 \stackrel{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in [x_1, x_2] \subset [c_1, c_2] / F'(c) = 0$$

$\Rightarrow$ Absurdo porque son raíces consecutivas $\rightarrow$ Hipótesis Errónea

[Volver](#)



Demostración: Acotaciones de punto fijo

➤ Motivación

📁 Descripción

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

📁 Ejercicios

📁 Bibliografía

CONDICIONES

$$g(x) \in C[a, b] \wedge g'(x) \in C(a, b) \quad \forall x \in [a, b]: g(x) \in [a, b] \quad \forall x \in (a, b): |g'(x)| \leq k < 1$$

HIPÓTESIS

$$\alpha \text{ punto fijo de } g(x) \rightarrow \alpha \in [a, b]: g(\alpha) = \alpha \quad \text{Sucesión: } x_n = g(x_{n-1})$$

$$|\alpha - x_n| = |g(\alpha) - g(x_{n-1})| \stackrel{T^{\text{aVM}}}{=} |g'(\xi)(\alpha - x_{n-1})|_{\xi \in (\alpha, x_{n-1})} = |g'(\xi)| |\alpha - x_{n-1}| \leq k |\alpha - x_{n-1}|$$

Aplicando inducción

$$|\alpha - x_n| \leq k^n |\alpha - x_0| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha - x_n| = \left| \alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |\alpha - x_0| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

Repitiendo el proceso anterior, se tiene $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$, y tomando $m > n$

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m \pm x_{m-1} \pm x_{m-2} \cdots \pm x_{n+1} - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq k^{m-1} |x_1 - x_0| + k^{m-2} |x_1 - x_0| + \cdots + k^{n+1} |x_1 - x_0| + k^n |x_1 - x_0| \leq \\ &\leq |x_1 - x_0| (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-2} + k^{m-1}) \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n - k^{m-1} \cdot k}{1 - k} \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n - k^m}{1 - k} \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_m - x_n| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} x_m - x_n \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(|x_1 - x_0| \frac{k^n - k^m}{1 - k} \right) \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n - \lim_{m \rightarrow \infty} k^m}{1 - k} \Rightarrow$$

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|$$

[Volver](#)



Demostración: Método de Aitken

➤ Motivación

📁 Descripción

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

📁 Ejercicios

📁 Bibliografía

Método con convergencia lineal: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x^{(n+1)}|}{|\alpha - x^{(n)}|} = \lambda$

Se supone:

⇒ n "suficientemente grande"

⇒ el numerador y denominador tienen el mismo signo

$$\frac{\alpha - x^{(n+1)}}{\alpha - x^{(n)}} \approx \lambda \approx \frac{\alpha - x^{(n+2)}}{\alpha - x^{(n+1)}} \rightarrow (\alpha - x^{(n+1)})(\alpha - x^{(n+1)}) \approx (\alpha - x^{(n)})(\alpha - x^{(n+2)}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha (x^{(n+2)} - 2x^{(n+1)} + x^{(n)}) \approx x^{(n)} x^{(n+2)} - x^{(n+1)} x^{(n+1)}$$

$$\rightarrow \alpha \approx \frac{x^{(n)} x^{(n+2)} - x^{(n+1)} x^{(n+1)}}{x^{(n+2)} - 2x^{(n+1)} + x^{(n)}}$$

Operando para simplificar

$$\alpha \approx \frac{x^{(n)} x^{(n+2)} - x^{(n+1)} x^{(n+1)} \mp x^{(n)} 2x^{(n+1)} \pm x^{(n)} x^{(n)}}{x^{(n+2)} - 2x^{(n+1)} + x^{(n)}} = x^{(n)} + \frac{-x^{(n+1)} x^{(n+1)} + x^{(n)} 2x^{(n+1)} - x^{(n)} x^{(n)}}{x^{(n+2)} - 2x^{(n+1)} + x^{(n)}}$$

$$\alpha \approx x^{(n)} - \frac{(x^{(n+1)} - x^{(n)})^2}{(x^{(n+2)} - x^{(n+1)}) - (x^{(n+1)} - x^{(n)})}$$

[Volver](#)



Demostración: Newton con raíces múltiples

➤ Motivación

📁 Descripción

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

📁 Ejercicios

📁 Bibliografía

$$F(x) = (x - \alpha)^n h(x) : h(\alpha) \neq 0$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{F(x)}{F'(x)} = x - \frac{(x - \alpha)^n h(x)}{\alpha \cdot (x - \alpha)^{n-1} h(x) + (x - \alpha)^n h'(x)} = \\ &= x - \frac{(x - \alpha) \cdot h(x)}{n \cdot h(x) + (x - \alpha) \cdot h'(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{[h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x)][n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x)]}{[n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x)]^2} \\ &\quad + \frac{\cancel{(x - \alpha)} \cdot h(x)[(n+1) \cdot h'(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h''(x)]}{[n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x)]^2} \end{aligned}$$

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{[h(\alpha)][n \cdot h(\alpha)]}{[n \cdot h(\alpha)]^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

[Volver](#)



Demostración: raíces simples

➤ Motivación

📁 Descripción

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

📁 Ejercicios

📁 Bibliografía

$$F(x) = (x - \alpha)^n h(x) : h(\alpha) \neq 0$$

$$\psi(x) = \frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{(x - \alpha) \cdot h(x)}{n \cdot h(x) + (x - \alpha) \cdot h'(x)}$$

$$\psi'(x) = \frac{\left[h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x) \right] \left[n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x) \right]}{\left[n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x) \right]^2} + \frac{\cancel{(x - \alpha)} \cdot h(x) \left[(n + 1) \cdot h'(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h''(x) \right]}{\left[n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x) \right]^2}$$

$$\psi'(\alpha) = \frac{\left[h(\alpha) \right] \left[n \cdot h(\alpha) \right]}{\left[n \cdot h(\alpha) \right]^2} = \frac{1}{n} \neq 0$$

[Volver](#)



Ejercicios Propuestos

➤ Motivación

📁 Descripción

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

📁 Ejercicios

📁 Bibliografía



1 (+RF) – 3 – 4 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13



Bibliografía comentada

➤ **Motivación**

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

Ejercicios

Bibliografía



Conceptos básicos (I)

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
 - Conceptos básicos
 - Solución analítica
 - Resolución numérica



Conceptos básicos (II)

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
 - Conceptos básicos
 - Solución analítica
 - Resolución numérica



Conceptos básicos (III)

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software



Anexos

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

- Demostraciones y desarrollos



Runge Kutta de Orden 2

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Introducción
 - Mét. Intervalo
 - Mét. Iter. Funcional
 - Mét. Newton y otros
 - Raíces Múltiples
 - Resumen General
 - Caso Polinómico
- Bibliografía
- Software

[Volver](#)