

2. Resolución numérica de ecuaciones no lineales

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dada la ecuación

$$f(x) = 0$$

1. ¿Tiene alguna solución?
2. ¿Cuántas?
3. ¿Cómo las calculamos?

2.1. Existencia y unicidad de soluciones

Teorema 2.1 (Bolzano) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema 2.2 (Rolle) Sea $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[\alpha, \beta]$ y derivable en (α, β) . Si $f(\alpha) = f(\beta)$, entonces existe $\xi \in (\alpha, \beta)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

Corolario 2.3 Si $f'(x) \neq 0$ en (a, b) , entonces la c del teorema de Bolzano es única.

2.2. Método del punto fijo.

Cambiamos el problema. Vamos a resolver:

$$x = g(x)$$

Las soluciones de este problema se llaman puntos fijos de g .

Teorema 2.4 Si $g \in C[a, b]$ y $a \leq g(x) \leq b \forall x \in [a, b]$, entonces existe un punto fijo de g : existe $c \in [a, b]$ tal que $c = g(c)$.

Teorema 2.5 Si además g es derivable en (a, b) y $|g'(x)| < 1 \forall x \in (a, b)$, entonces el punto fijo es único.

La iteración de punto fijo se define como

- $x_0 \in \mathbb{R}$ (semilla)
- $x_{n+1} = g(x_n)$ para $n \geq 0$.

Generamos así de manera recursiva una sucesión (x_n) .

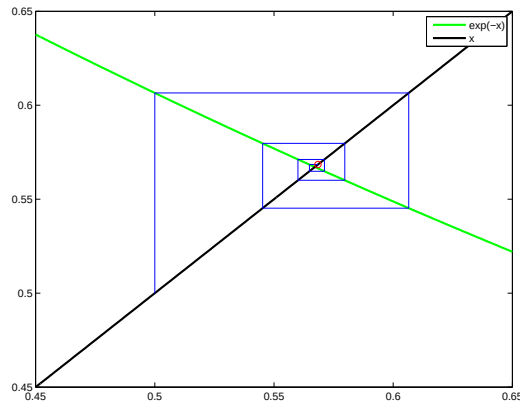
Teorema 2.6 Si g es continua y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, entonces $c = g(c)$.

Ejemplo 2.1 Vamos a resolver la ecuación

$$x = e^{-x}$$

con dos cifras de precisión:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.50 \\ x_1 &= e^{-0.50} = 0.61 \dots \\ x_2 &= e^{-0.61 \dots} = 0.55 \dots \\ x_3 &= e^{-0.55 \dots} = 0.58 \dots \\ x_4 &= e^{-0.58 \dots} = 0.56 \dots \\ x_5 &= e^{-0.56 \dots} = 0.57 \dots \\ x_6 &= e^{-0.57 \dots} = 0.56 \dots \\ x_7 &= e^{-0.56 \dots} = 0.57 \dots \\ x_8 &= e^{-0.57 \dots} = 0.57 \dots \end{aligned}$$



La solución es $c = 0.57 \dots$

Nota: Puede que haya punto(s) fijo(s) pero que la iteración de punto fijo no converja. Por ejemplo, para resolver

$$x = x^2$$

que tiene dos puntos fijos $c = 0$ y $c = 1$. Si arrancamos en $x_0 = 2$, se tiene que $x_1 = 4$, $x_2 = 16$, $x_3 = 32$, ... Claramente $x_n \rightarrow +\infty$.

Definición 2.7 Una función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice contractiva si existe $0 < k < 1$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Ejemplo 2.2

a) La función $f(x) = x/2 + 3$ es contractiva en cualquier intervalo:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1/2 + 3 - (x_2/2 + 3)| = |x_1/2 - x_2/2| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Luego la constante de contractividad en este caso es $k = 1/2$.

b) La función $f(x) = |x|/2$ es contractiva en cualquier intervalo. Por las propiedades del valor absoluto tenemos:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = ||x_1|/2 - |x_2|/2| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Teorema 2.8 Si $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es contractiva con constante de contractividad $0 < k < 1$ en $[a, b]$ y además

$$a \leq g(x) \leq b \quad \forall x \in [a, b],$$

entonces la iteración de punto fijo converge hacia la única solución c del problema para cualquier semilla $x_0 \in [a, b]$. Además se tienen los siguientes resultados sobre el error:

$$|c - x_n| \leq k^n |c - x_0|, \quad |c - x_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|, \quad |c - x_n| \leq \frac{k}{1 - k} |x_n - x_{n-1}|$$

En la práctica, para comprobar que una función derivable $g(x)$ cumple la condición de mapeo $a \leq g(x) \leq b \forall x \in [a, b]$ no hay que comprobar todos los puntos del intervalo. Basta con hallar todos los puntos $x_i \in (a, b)$ tales que $g'(x_i) = 0$ y comprobar que $a \leq g(x_i) \leq b$, $a \leq g(a) \leq b$ y $a \leq g(b) \leq b$.

El siguiente resultado nos proporciona una forma de ver si una función es contractiva.

Teorema 2.9 Si $g \in C^1[a, b]$ y existe $0 < k < 1$ tal que

$$|g'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in [a, b],$$

entonces g es contractiva en $[a, b]$.

En la práctica, para comprobar si una función derivable 2 veces $g(x)$ es contractiva, habrá que hallar los puntos $p_i \in (a, b)$ tales que $g''(p_i) = 0$ y ver que $|g'(p_i)| < 1$ para todos ellos, $|g'(a)| < 1$ y $|g'(b)| < 1$. En este caso se puede tomar $k = \max\{|g'(a)|, |g'(b)|, |g'(p_i)|\}$.

2.3. Métodos de aproximación de raíces.

Método de bisección: Se basa simplemente en el Teorema de Bolzano. Generamos 3 sucesiones (a_n) , (b_n) y (c_n) de la siguiente manera:

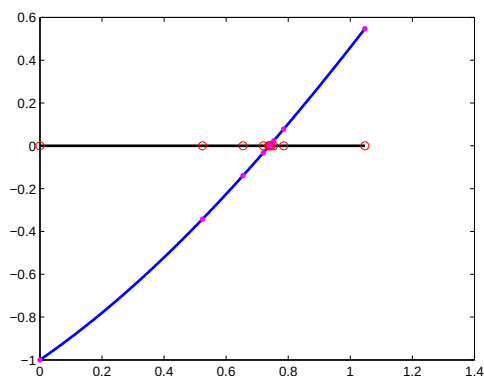
- $a_0 = a, b_0 = b$
- Para $n \geq 0$
 - $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$
 - si $f(c_{n+1}) \cdot f(b_n) < 0$, tomamos $a_{n+1} = c_{n+1}, b_{n+1} = b_n$
 - si $f(c_{n+1}) \cdot f(a_n) < 0$, tomamos $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_{n+1}$

Por ejemplo: las sucesiones generadas por el método de bisección para resolver la ecuación

$$x - \cos(x) = 0 \text{ en } [0, \pi/3]$$

con $XTOL = 5 \cdot 10^{-3}$, son

n	a	b	c	fa	fb	fc
n	n	n	n+1			
0	0.00	1.05	0.52	-1.000	+0.547	-0.342
1	0.52	1.05	0.79	-0.342	+0.547	+0.078
2	0.52	0.79	0.65	-0.342	+0.078	-0.139
3	0.65	0.79	0.72	-0.139	+0.078	-0.032
4	0.72	0.79	0.75	-0.032	+0.078	+0.023
5	0.72	0.75	0.74	-0.032	+0.023	-0.005
6	0.74	0.75	0.74	-0.005	+0.023	+0.009
7	0.74	0.74	0.74	-0.005	+0.009	+0.002



Teorema 2.10 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces la sucesión c_n generada por el método de bisección converge hacia algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Además

$$|c_n - c| \leq b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}.$$

Método de regula falsi: En el método de bisección no se usa ninguna **información** sobre el valor de la función, sólo sobre su signo. Podemos mejorar eso cambiando la forma de tomar c_{n+1} . Ahora va a ser el punto de corte con el eje OX de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

$$c_{n+1} = b_n - f(b_n) \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

Las sucesiones generadas por el método de regula falsi para $x - \cos(x) = 0$ en $[0, \pi/3]$ con $XTOL = 5 \cdot 10^{-3}$ son

n	a	b	c	fa	fb	fc
	n	n	n+1			
=====						
0	0.00	1.05	0.68	-1.000	+0.547	-0.103
1	0.68	1.05	0.74	-0.103	+0.547	-0.006
2	0.74	1.05	0.74	-0.006	+0.547	-0.000

Teorema 2.11 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces la sucesión c_n generada por el método de regula falsi converge hacia algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Además, existe una constante $0 < k < 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|c_n - c| \leq k|c_{n-1} - c| \quad \forall n \geq n_0.$$

Velocidad de convergencia: Antes de seguir estudiando métodos, vamos a dar una definición que nos ayude a distinguir los métodos “rápidos” de los métodos lentos.

Definición 2.12 Sea (x_n) una sucesión tal que $x_n \rightarrow x$. Diremos que el orden de convergencia de x_n hacia x es $p > 0$ si existe $k > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x - x_{n+1}| \leq k|x - x_n|^p \quad \forall n \geq n_0$$

Si $p = 1$, y $0 < k < 1$ la convergencia se dice lineal y k se llama factor de convergencia. Si $p = 2$, la convergencia se dice cuadrática. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - x_{n+1}}{|x - x_n|} = 0$$

la convergencia se dice superlineal.

En la práctica, una de las maneras de comprobar si el orden de convergencia de una sucesión es p es calcular el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_{n+1}|}{|x - x_n|^p} = \ell$$

Si $p > 1$ y $\ell < \infty$, el orden de convergencia es p .

Si $p = 1$ y $\ell = 0$, la convergencia es superlineal.

Si $p = 1$ y $0 < \ell < 1$, la convergencia es lineal.

Ejemplo 2.3

a) $x_n = 1/n \rightarrow x = 0$, pero la convergencia no es ni siquiera lineal porque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|0 - 1/(n+1)|}{|0 - 1/n|^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = 1$$

b) $x_n = 1/2^n \rightarrow x = 0$ linealmente porque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/2^{n+1}}{|1/2^n|^1} = 1/2$$

	n		1/n		1/2^n
Converger linealmente es converger muy des-	1		1.00		0.50000
pacio. En cada iteración aumentamos el	2		0.50		0.25000
número de decimales exactos en una canti-	3		0.33		0.12500
dad fija que es aproximadamente $\log_{10}(1/k)$.	4		0.25		0.06250
Para $1/n$, $\log_{10}(1) = 0$, así que no podemos	5		0.20		0.03125
decir nada sobre los decimales exactos gana-	6		0.17		0.01563
dos en cada iteración.	7		0.14		0.00781
Para $1/2^n$, $\log_{10}(2) \approx 0.3$, así que más o	8		0.13		0.00391
menos cada 3 iteraciones ganamos 1 decimal	9		0.11		0.00195
exacto.	10		0.10		0.00098

c) El método de bisección converge, pero la convergencia $c_n \rightarrow c$ no es ni siquiera lineal en general, ya que puede darse el caso de que el error $|c_n - c|$ crezca en algunas iteraciones en vez de disminuir. Sin embargo, la convergencia $b_n - a_n \rightarrow 0$ sí es lineal.

d) $x_n = 1/2^{2^n} \rightarrow x = 0$ cuadráticamente porque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1/2^{2^{n+1}}|}{(1/2^{2^n})^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{2^{2^n}} = 1$$

Converger cuadráticamente es converger bastante rápido. Aproximadamente en cada iteración duplicamos el número de decimales exactos.

n		1/2^(2^n)
1		0.2500000000000000

```
2 | 0.0625000000000000
3 | 0.0039062500000000
4 | 0.000015258789063
5 | 0.000000000232831
6 | 0.0000000000000000
```

Método de la secante: Observa que al hacer regula falsi para resolver $x - \cos(x) = 0$ en $[0, \pi/3]$, siempre nos hemos apoyado en el punto b original, que está lejos de la solución. Para hacer la iteración 2 lo mejor sería haberse apoyado en los puntos de abscisas 0.68 y 0.74, que son los que mejor **información** tienen sobre la solución por ser los últimos que se han encontrado. En eso consiste el método de la secante:

- Tomar x_0, x_1 dos semillas (preferentemente que cumplan la condición de Bolzano de cambio de signo)
- Para $n \geq 1$ definimos

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

En este caso la sucesión generada es:

n	x	fx
0	0.0000	-1.0000
1	1.0472	+0.5472
2	0.6768	-0.1027
3	0.7354	-0.0062
4	0.7391	+0.0001

Como el ejemplo es muy sencillo sale el mismo trabajo que para regula falsi (antes calculábamos c_1, c_2, c_3 , y aquí x_2, x_3, x_4).

Teorema 2.13 Sea $\delta > 0$ y $f \in C^2(c - \delta, c + \delta)$, tal que $f(c) = 0$ y $f'(c) \neq 0$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que si $x_0, x_1 \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, la sucesión x_n generada por el método de la secante converge hacia c , y el orden de convergencia es al menos $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$. Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c - x_{n+1}|}{|c - x_n|^\phi} = \left| \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(c)} \right|^{\phi-1}$$

Método de Newton Cuando en el método de la secante los puntos consecutivos están muy juntos, la recta secante a la curva en esos puntos tiende hacia la tangente, y la pendiente de esta recta es la derivada en el punto. El método de Newton se escribe pues

- Tomar x_0 una semilla.

- Para $n \geq 0$ definimos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

De nuevo $x - \cos(x) = 0$ con $XTOL = 5 \cdot 10^{-3}$.

n	x	fx	dfx
=====			
0	0.0000	-1.0000	+1.0000
1	1.0000	+0.4597	+1.8415
2	0.7504	+0.0189	+1.6819
3	0.7391	+0.0000	+1.6736
4	0.7391	+0.0000	+1.6736

Teorema 2.14 Sea $\delta > 0$ y $f \in C^2(c - \delta, c + \delta)$, tal que $f(c) = 0$ y $f'(c) \neq 0$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que si $x_0 \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, la sucesión x_n generada por el método de la secante converge hacia c , y el orden de convergencia es al menos cuadrático. Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c - x_{n+1}|}{|c - x_n|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(c)}{f'(c)} \right|$$

Algunas consideraciones:

1. Newton es un método de punto fijo para la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

2. Newton y la secante son métodos de carácter local: convergen bajo ciertas condiciones si la semilla está “cerca” de la solución.
3. Newton falla si $f'(x_n) = 0$. Newton y la secante convergen linealmente si $f'(c) = 0$.
4. Para parar estos algoritmos, se pueden usar varios tests de paradas y combinaciones AND y OR de ellos:

- Controlar el error absoluto:

$$|x_n - x_{n-1}| < XTOL$$

- Controlar el error relativo:

$$\frac{2|x_n - x_{n-1}|}{|x_n| + |x_{n-1}|} < RTOL$$

- Buscamos que $f(c) = 0$, así que un posible criterio es

$$|f(x_n)| < FTOL$$

Comparación de los métodos. Si intentamos resolver $x - \cos(x) = 0$ con $XTOL = 5 \cdot 10^{-16}$, el número de iteraciones es

Método	iteraciones
Punto fijo	89
Bisección	51
Regula Falsi	13
Secante	7
Newton	6

Claramente, Newton y Secante son los métodos más rápidos, pero ¿cuál es mejor?. El orden de convergencia del método de Newton es mayor ($2 > 1.618$), pero en cada iteración del método de la secante hay que evaluar una vez la función, mientras que en cada iteración del método de Newton hay que evaluar la función y su derivada.

Si evaluar $f'(x)$, lleva el mismo trabajo que evaluar $f(x)$, tendremos que cada iteración del método de Newton lleva el mismo trabajo que 2 iteraciones del método de la Secante. Pero al hacer 2 iteraciones el método de la secante, tendremos que

$$|x_{n+2} - c| \leq k|x_{n+1} - c|^{1.618} \leq k(k|x_n - c|^{1.618})^{1.618} \leq \tilde{k}|x_n - c|^{2.618}$$

ya que $((1+\sqrt{5})/2)^2 \approx 2.618$. En este caso, con el mismo trabajo, hemos multiplicado el número de decimales exactos por 2.6, así que es preferible el método de la secante.

En general se tiene la siguiente “regla”:

Si (trabajo de evaluar $f'(x)$) $> 44\%$ (trabajo de evaluar $f(x)$) es preferible la secante.

En caso contrario es preferible Newton.

Combinación de Newton y bisección: Newton es rápido, pero poco fiable si en alguna iteración $f'(x_n) \approx 0$, ya que tendremos que dividir por algo cercano a cero, con lo cual aumenta el error de redondeo y el resultado se hace muy grande. Bisección es lento pero seguro. He aquí un algoritmo que combina lo mejor de cada uno de estos métodos.

- $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = b$
- Para $n \geq 0$
 - $c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$
 - Si $c_{n+1} \notin (a_n, b_n)$
 - % Newton ha ido mal. Bisección
 - $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$
 - fin si
 - si $f(c_{n+1}) \cdot f(b_n) < 0$, tomamos $a_{n+1} = c_{n+1}, b_{n+1} = b_n$
 - si $f(c_{n+1}) \cdot f(a_n) < 0$, tomamos $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_{n+1}$

2.4. Ejercicios

Ejercicio 2.1 Método del punto fijo.

1. Demuestra que $x = \cos(x)$ tiene una única solución en $[0, \pi/3]$, que la iteración de punto fijo converge en ese intervalo y calcula el (peor) ritmo de convergencia k .
2. Con una calculadora calcula k^{32} .
Sale 0.01. 32 es el número de iteraciones que hay que hacer para tener 2 cifras de precisión en el peor de los casos.
3. Calcula la solución con una calculadora tomando como semilla 0.75 hasta obtener 2 cifras de precisión. Cuenta el número de iteraciones necesario. (Escribe 0.75 en la calculadora y dale a la tecla del coseno hasta que las dos primeras cifras se repitan.)

Ejercicio 2.2 Método de bisección:

- a) ¿Cuántas iteraciones de bisección son necesarias para garantizar que el error absoluto cometido es más pequeño que un $\varepsilon > 0$ dado?
- b) Si sabemos que la aproximación dada por c_n tiene k decimales exactos, ¿cuántas iteraciones hay que hacer para ganar otro decimal?

Ejercicio 2.3 Probar que $1/2^{n^2}$ converge superlinealmente, pero que su orden de convergencia no puede ser ningún $p > 1$. Escribe una tabla para $n = 1, \dots, 7$.

Ejercicio 2.4

- a) Escribe los algoritmos de bisección, regula falsi, secante y Newton para resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$.
- b) Ejecútalos a mano (puedes usar una calculadora) hasta lograr una precisión absoluta de 8 decimales.
- c) Demuestra que el orden de convergencia de la sucesión generada en este caso por el método de Newton es 2.

2.5. Ejercicios complementarios

Ejercicio 2.5 Algún ejercicio de punto fijo con función más complicada

Ejercicio 2.6 La orden `fzero` de MATLAB usa una combinación de bisección y secante (en algunos casos también usa el método de interpolación cuadrática inversa, que no hemos visto este curso). Escribe un algoritmo que combine bisección y secante.

Ejercicio 2.7 (*Ningún método es el mejor de todos*)

Sea $M > (1 + \sqrt{5})/2$ y sea

$$f(x) = \begin{cases} M - Mx & \text{si } 0 \leq x \leq 1 + 1/M \\ -1 & \text{si } 1 + 1/M \leq x \leq M. \end{cases}$$

- a) Dibuja la función y calcula la solución de $f(x) = 0$ en $[0, M]$.
- b) ¿Para que valores de x_0 es aplicable el método de Newton?. ¿Cuántas iteraciones tarda en converger para una precisión absoluta ε_a ?
- c) ¿Se puede aplicar el método de la secante con $x_0 = 0$, $x_1 = M$?
- d) ¿Cuántas iteraciones n_b del método de bisección se necesitan para lograr una precisión absoluta dada ε_a tomando $a_0 = 0$ y $b_0 = M$?
- e) Aplicamos el método de Regula Falsi tomando $a_0 = 0$ y $b_0 = M$. Dibuja esquemáticamente unas cuantas iteraciones suponiendo $M \gg 1$.
1. Probar que si $a_{n-1} = 0$ y $b_{n-1} > 1 + 1/M$, entonces $c_n = M^{n+1}/(M+1)^n$.
 2. Calcular la primera iteración n_r en que tiene que $c_{n_r} < 1 + 1/M$.
 3. Calcular el error absoluto y el relativo entre dos iteraciones consecutivas con $1 < n \leq n_r$:
$$e_a = |c_n - c_{n-1}|, \quad e_r = e_a/|c_n|$$
 4. Explicar qué ocurre si para $M = 10^8$ tomamos una tolerancia relativa de $\varepsilon_r = 10^{-6}$.
 5. Probar que $c_{n_r} > 1$. Deducir que por tanto $a_{n_r} = 0$ y que para este problema el método de Regula Falsi converge exactamente en $n_r + 1$ iteraciones.
- f) Sea $\varepsilon = 2^{-52}$ y $M \geq 20$. ¿Es mejor el método de bisección o el de Regula Falsi?