

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- A continuación se muestra el pseudocódigo correspondiente a un método de resolución de ecuaciones no lineales.

Algoritmo

Paso 1: Asignar $f_0 \leftarrow f(x_0)$; $f_1 \leftarrow f(x_1)$;

Paso 2: Repetir para i desde 1 hasta n , Pasos 3-6

Paso 3: Calcular $c \leftarrow x_1 - f_1 \frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0} \wedge f_c \leftarrow f(c)$

Paso 4: Asignar $x_0 \leftarrow x_1 \wedge f_0 \leftarrow f_1$;

Paso 5: Asignar $x_1 \leftarrow c \wedge f_1 \leftarrow f_c$;

Paso 6: Si $|x_0 - x_1| < \varepsilon \vee |f_1| < \delta$ entonces Salida x_1 , FIN

Paso 7: Imprimir 'Finalizadas las iteraciones sin convergencia', FIN

- Interpretar geoméricamente el método. ¿Sabrías identificarlo?. Indicar las diferencias (si las hay) entre el método expuesto y el de Regula Falsi (aplicabilidad, convergencia, etc.).
- Se considera la ecuación $x^3 + 15x^2 - 0.5 = 0$. Acotar y separar las raíces de la ecuación anterior en intervalos de longitud 1, utilizando los algoritmos vistos en clase y en prácticas.
- Realizar 3 iteraciones del algoritmo a la ecuación anterior a partir de los puntos iniciales -2 y 1 .
- Obtener las soluciones reales de la ecuación. ¿Cuál habría sido el método adecuado para obtener todas las raíces?. ¿Y para obtener las negativas?.

Apartado (a) Identificación del método y comparación con Regula Falsi

El método expuesto es el de la secante, método derivado del de Newton y por tanto basado en los algoritmos de iteración funcional. Sus características son:

- Sólo requiere continuidad de la función.
- Se puede emplear independientemente del orden de multiplicidad de la raíz.
- No es posible acotar el error cometido.
- La convergencia es superlineal, sin embargo es difícil verificar las condiciones de convergencia. Suele presentar problemas con los extremos y comportamientos asintóticos

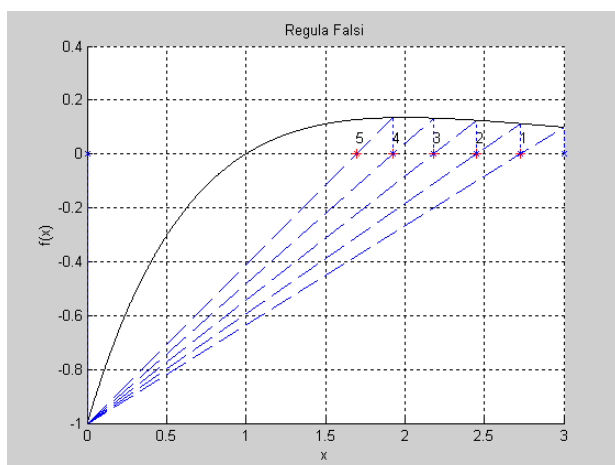
Por el contrario, Regula Falsi en que este es un método de intervalo, siendo sus características:

1. Requiere que se cumpla el Teorema de Bolzano (la función cambia de signo en los extremos del intervalo).
2. No se puede usar con raíces múltiples de orden par (no hay cambio de signo).
3. El error viene acotado por la amplitud del intervalo.
4. La convergencia es superlineal.

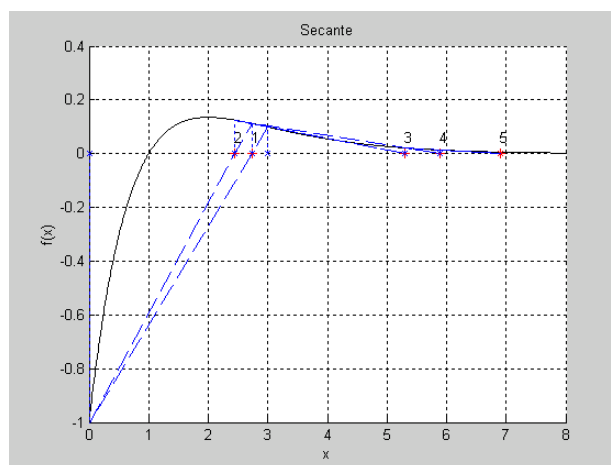
Veamos esto con algunos ejemplos.

- Estudiamos la función $(x-1)e^{-x}$ en el intervalo $[0,3]$.

El método de Régula Falsi converge hacia la raíz, disminuyendo siempre el valor del extremo derecho. Sin embargo, independientemente del orden en que se tomen ambos puntos, el método de la secante diverge.

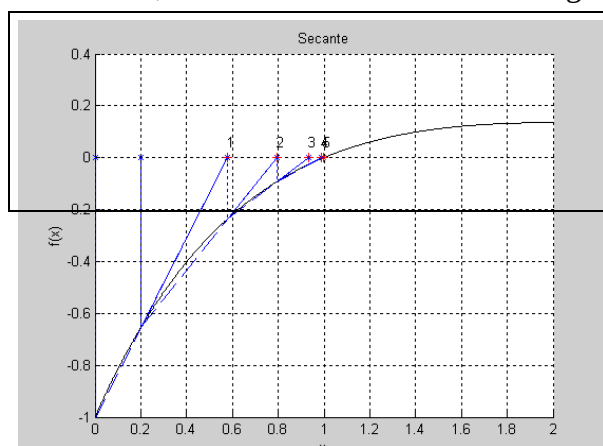


a	f(a)	b	f(b)	x _n
0	-1.0000	3.0000	0.0996	2.7283
0	-1.0000	2.7283	0.1129	2.4515
0	-1.0000	2.4515	0.1251	2.1790
0	-1.0000	2.1790	0.1334	1.9225
0	-1.0000	1.9225	0.1349	1.6940



x _{n-2}	f(x _{n-2})	x _{n-1}	f(x _{n-1})	x _n
3.0000	0.0996	0	-1.0000	2.7283
0	-1.0000	2.7283	0.1129	2.4515
2.7283	0.1129	2.4515	0.1251	5.2990
2.4515	0.1251	5.2990	0.0215	5.8895
5.2990	0.0215	5.8895	0.0135	6.8956

Sin embargo, se comprueba que la elección de los puntos de partida es fundamental en el método de la secante. Así, tomando dos puntos de partida diferentes, por ejemplo $x_0=0$, $x_1=0.2$, el método de la secante converge.



x _{n-2}	f(x _{n-2})	x _{n-1}	f(x _{n-1})	x _n
0	-1.0000	0.2000	-0.6550	0.5797
0.2000	-0.6550	0.5797	-0.2354	0.7927
0.5797	-0.2354	0.7927	-0.0938	0.9339
0.7927	-0.0938	0.9339	-0.0260	0.9880

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

	0.9339	-0.0260	0.9880	-0.0045	0.9992
--	--------	---------	--------	---------	--------

Apartado (b) Acotación y Separación de raíces

Utilizamos el método de Laguerre-Thibault para la acotación. Este método nos dice que un valor z es cota superior cuando los coeficientes del cociente y resto de dividir $P(x)$ entre $(x-z)$ no cambian de signo, esto es, son no positivos o no negativos.

Raíces Positivas, cota superior: $P(x) = x^3 + 1.5x^2 - 0.5$

	1	1.5	0	-0.5
1		1	2.5	2.5
	1	2.5	2.5	2

Y puesto que los coeficientes son no negativos, 1 es la cota superior

Raíces Positivas, cota inferior: $x^3 P\left(\frac{1}{x}\right) = -0.5x^3 + 1.5x + 1$

	-0.5	0	1.5	1
2		-1	-2	-1
	-0.5	-1	-0.5	0

Todos los coeficientes son no positivos, y por tanto la cota es $1/2$

Raíces Negativas, cota inferior: $P(-x) = -x^3 + 1.5x^2 - 0.5$

	-1	1.5	0	-0.5
2		-2	-1	-2
	-1	-0.5	-1	-2.5

Todos los coeficientes son no positivos, y por tanto la cota es -2

Raíces Negativas, cota superior: $x^3 P\left(-\frac{1}{x}\right) = -0.5x^3 + 1.5x - 1$

	-0.5	0	1.5	-1
2		-1	-2	-1
	-0.5	-1	-0.5	-2

Todos los coeficientes son no positivos, y por tanto la cota es $-(1/2)$

Los intervalos de las raíces son por tanto $[-2, -1/2]$ y $[1/2, 1]$.

Debemos aplicar ahora Boudan-Fourier para determinar las raíces en cada intervalo. Para ello es necesario determinar el valor del polinomio y de sus derivadas.

	-2	-1/2	1/2	1
$P(x) = x^3 + 1.5x^2 - 0.5$	-2.5	-0.25	0	2
$P'(x) = 3x^2 + 3x$	6	-0.75	2.25	6
$P''(x) = 6x + 3$	-9	0	6	9
$P'''(x) = 6$	6	6	6	6
Variaciones de Signo	3	1	0	0

Raíces en $[-2, -1/2] = |3-1| = 2$ ó 0

Raíces en $[1/2, 1] = |0-0| = 0$, pero se observa que $1/2$ es raíz exacta

El polinomio tiene una raíz real en $\frac{1}{2}$. Las otras dos o están en $[-2, -\frac{1}{2}]$ o son complejas conjugadas.

Otra forma de estudiarlas hubiera sido mediante el análisis de la función.

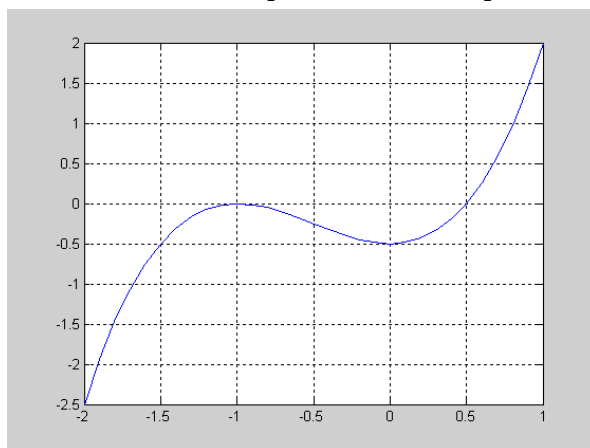
$$P'(x) = 3x^2 + 3x = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = -1.$$

$P'(-1) = -3$ y $P'(0) = 3$. Por tanto -1 es un máximo relativo y 0 es el mínimo relativo.

La función es creciente en $(-\infty, -1]$, decreciente en $[-1, 0]$ y de nuevo creciente en $[0, \infty)$. Evaluamos los valores en los extremos:

$$P(-1) = 0 \text{ y } P(0) = -0.5$$

Por tanto, existe una raíz doble en -1 y una simple en el intervalo $[0, \infty)$, o más concretamente en $[\frac{1}{2}, 1]$. Todo esto se ve fácilmente en la representación del polinomio.



Apartado (c) Realizar 3 iteraciones del algoritmo partiendo de -2 y 1 .

x_{n-2}	$f(x_{n-2})$	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	x_n
-2.0000	-2.5000	1.0000	2.0000	-0.3333
1.0000	2.0000	-0.3333	-0.3704	-0.1250
-0.3333	-0.3704	-0.1250	-0.4785	-1.0468
-0.1250	-0.4785	-1.0468	-0.0034	-1.0534
-1.0468	-0.0034	-1.0534	-0.0044	-1.0253
-1.0534	-0.0044	-1.0253	-0.0010	-1.0174
-1.0253	-0.0010	-1.0174	-0.0005	-1.0104
-1.0174	-0.0005	-1.0104	-0.0002	-1.0065
-1.0104	-0.0002	-1.0065	-0.0001	-1.0040
-1.0065	-0.0001	-1.0040	-0.0000	-1.0025

Apartado (d) Obtención de las raíces

En los apartados anteriores ya se ha visto que éstas son -1 (doble) y 0.5 (simple). De todas formas, una vez obtenida una cualquiera (y 0.5 se obtuvo directamente en el apartado a), las otras dos se calculan de forma inmediata.

También es posible su cálculo utilizando la técnica para resolver una ecuación de tercer grado $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, en nuestro caso, $x^3 + 1.5x^2 - 0.5 = 0$:

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 5 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

1. Cambio de variable $x = y - \frac{A}{3}$ obteniendo $y^3 + 3py + 2q = 0$

$$x = y - 0.5 \rightarrow y^3 - 0.75y - 0.25 = 0$$

2. Cálculo de $D = p^3 + q^2$

$$D = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = 0$$

3. Se pueden distinguir tres casos:

- Si $D > 0$: una raíz real y_1 y dos complejas conjugadas $y_{2,3}$
- Si $D = 0$: se tiene una raíz real simple y_1 y otra raíz real doble $y_{2,3}$
- Si $D < 0$: se tienen tres raíces reales $y_1, y_{2,3}$

$$4. \quad D \geq 0, \quad u, v = \sqrt[3]{-q \pm \sqrt{D}}; \quad y_1 = u + v, \quad y_{2,3} = -\frac{u+v}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i$$

$$u, v = \sqrt[3]{-\left(-\frac{1}{8}\right) \pm \sqrt{0}} = \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad y_{2,3} = -\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)i = -\frac{1}{2}$$

$$5. \quad D < 0, \quad \varphi = \arccos \frac{-q}{\sqrt[3]{-p^3}}, \quad y_1 = 2\sqrt{-p} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad y_{2,3} = 2\sqrt{-p} \cos \frac{\varphi \pm \pi}{3}$$

6. Se deshace el cambio de variable, $x_k = y_k - \frac{A}{3}$

$$x_1 = y_1 - 0.5 = 0.5, \quad x_{2,3} = y_{2,3} - 0.5 = -1$$

Si la ecuación fuera un polinomio de grado superior a 4, sus raíces no pueden ser obtenidas de forma analítica. El método numérico más adecuado para obtener todas las raíces sería el QD.

Si lo que se desea es obtener la raíz negativa, no se puede acudir a métodos de intervalo al no haber cambio de signo de la función por ser de multiplicidad par. A la hora de elegir un método de iteración funcional, seleccionamos el de Newton modificado, ya que mantiene la convergencia cuadrática. No es posible verificar las condiciones de convergencia global, pero a la vista de la gráfica de la función, esta se verifica para cualquier valor de partida negativo.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 6 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 2.- Dada la ecuación $f(x) = 2 \cdot \sin(x) - x[1 + \cos(x)]$:

- Realizar 5 iteraciones con el método de Newton partiendo de $x_0 = 1$, para obtener una raíz aproximada.
- Demostrar que existen modificaciones del método de Newton que permiten mantener velocidad de convergencia cuadrática cuando la raíz tiene multiplicidad α .
- Sabiendo que la raíz es triple, modificar el método de Newton y realizar tres iteraciones.

Apartado (a) Realizar 5 iteraciones con el método de Newton

El método de Newton genera una sucesión $\{x_n\}$ partiendo de una aproximación inicial x_0 , que se define como:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad n \geq 1$$

Considerando la función $f(x)$ calculamos la función derivada $f'(x)$:

$$f(x) = 2 \cdot \sin(x) - x[1 + \cos(x)]$$

$$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) - (1 + \cos(x)) + x \cdot \sin(x) = \cos(x) - 1 + x \cdot \sin(x)$$

Las 5 iteraciones pedidas con $x_0 = 1$:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 0,4088014350$$

$$x_2 = 0,2701900332$$

$$x_3 = 0,1794609019$$

$$x_5 = 0,1194468778$$

$$1.0000 \quad 0.1426 \quad 0.3818$$

$$0.6264 \quad 0.0386 \quad 0.1773$$

$$0.4088 \quad 0.0111 \quad 0.0801$$

$$0.2702 \quad 0.0033 \quad 0.0358$$

$$0.1795 \quad 0.0010 \quad 0.0160$$

$$0.1194 \quad 0.0003 \quad 0.0071$$

$$0.0796 \quad 0.0001 \quad 0.0032$$

$$0.0530 \quad 0.0000 \quad 0.0014$$

Apartado (b) Multiplicidad de orden α

Si tenemos una función $f(x)$ con una raíz r de multiplicidad α podemos expresarla de la siguiente manera:

$$f(x) = (x - r)^\alpha h(x) \text{ tal que } h(x) \neq 0$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 7 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Buscamos una función de la forma $g(x) = x$ equivalente a $f(x) = 0$ (la expresión $g(x)$ es una de las múltiples formas de expresar $f(x) = 0$). Si $g'(r) = 0$ entonces tendríamos velocidad de convergencia cuadrática. Observamos que la función $g(x)$ no lo cumple al tener una raíz múltiple:

$$g(x) = x - \frac{(x-r)^\alpha h(x)}{\alpha \cdot (x-r)^{\alpha-1} h(x) + (x-r)^\alpha h'(x)} = x - \frac{(x-r) \cdot h(x)}{\alpha \cdot h(x) + (x-r) \cdot h'(x)}$$

$$g'(r) = 1 - \frac{1}{\alpha} \neq 0$$

Este resultado nos induce a introducir una modificación del método de Newton para tener velocidad de convergencia cuadrática:

$$g(x) = x - \alpha \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Evidentemente:

$$g'(r) = 1 - \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 0$$

Apartado (c) Raíz triple

Sabiendo que la raíz es triple modificamos el método de Newton según lo visto en el apartado anterior:

$$x_n = x_{n-1} - 3 \cdot \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \text{ y particularizando para la función}$$

$$x_n = x_{n-1} - 3 \cdot \frac{2 \cdot \sin(x_{n-1}) - x_{n-1} [1 + \cos(x_{n-1})]}{\cos(x_{n-1}) - 1 + (x_{n-1}) \cdot \sin(x_{n-1})}$$

Las iteraciones pedidas son:

1.0000	0.1426	0.3818
-0.1209	-0.0003	0.0073
0.0002	0.0000	0.0000
0.0000	0	0

$$x_0 = 1$$

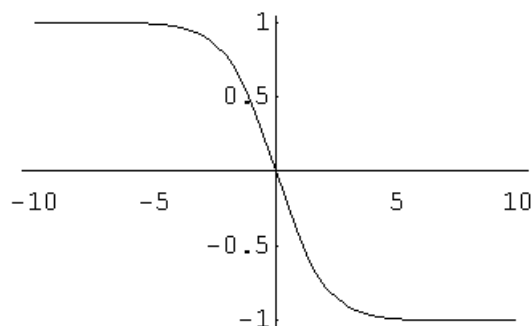
$$x_1 = -0,1208719983$$

$$x_2 = 0,177034903 \times 10^{-3}$$

$$x_3 = 0,4557938 \times 10^{-6}$$

0.1426	0.3818	-0.1209
-0.0003	0.0073	0.0002
1.0e-007 *	0.0000	0.1567 -0.0000
1.0e-024 *	-0.0000	0.1539 0

Ejercicio 3.- Sea la función $f(x) = \frac{2}{1+e^x} - 1$, cuya gráfica se muestra en la figura. Describir los métodos que conoce para el cálculo aproximado de la raíz de $f(x)=0$ en el intervalo $[-9,10]$, indicando sus ventajas e inconvenientes, y seleccionar el más adecuado.



Apartado (a) Métodos de intervalo

Todos los métodos de intervalo serán aplicables para calcular la raíz de esta ecuación, puesto que la función es continua, diferenciable y cambia de signo en cualquier intervalo que contenga la raíz. El método de bisección tiene el inconveniente de su lenta velocidad de convergencia. Puesto que la función se comporta de forma casi lineal cerca de la raíz, parece adecuado el método de Regula Falsi. El método de Regula Falsi modificada no resulta interesante, puesto que hace más lento el cálculo, y sin embargo la pendiente de la función a ambos lados de la raíz toma valores similares (es fácil comprobar que la función es antisimétrica). Por el mismo motivo, el aumento de la complejidad de los cálculos, se debe descartar el método de Müller. No parece indicado usar una interpolación parabólica cuando se observa que la función es casi lineal cerca de la raíz. Comparemos el resultado de algunas iteraciones con cada uno de los métodos.

Bisección	Iteración	a	f(a)	b	f(b)
	0	-9.0000	0,96403	10.000	-0,99991
	1	-9.0000	0,99975	0,50000	-0,24492
	2	-4.2500	0,97187	0,50000	-0,24492
	3	-1.8750	0,73407	0,50000	-0,24492
	4	-0,68750	0,33082	0,50000	-0,24492
	5	-0,93750x10 ⁻¹	0,46841x10 ⁻¹	0,50000	-0,24492
	6	-0,93750x10 ⁻¹	0,46841x10 ⁻¹	0,20313	-0,10121
	7	-0,93750x10 ⁻¹	0,46841x10 ⁻¹	0,54688x10 ⁻¹	-0,27337x10 ⁻¹
	8	-0,19531x10 ⁻¹	0,97653x10 ⁻²	0,54688x10 ⁻¹	-0,27337x10 ⁻¹
	9	-0,19531x10 ⁻¹	0,97653x10 ⁻²	0,17578x10 ⁻¹	-0,87888x10 ⁻²
	10	-0,97656x10 ⁻³	0,48828x10 ⁻³	0,17578x10 ⁻¹	-0,87888x10 ⁻²

Regula Falsi	Iter	a	f(a)	b	f(b)	x	f(x)
	1	-9.0000	0,99975	10.000	-0,99991	0,49926	-0,24457
	2	-9.0000	0,99975	0,49926	-0,24457	-1.3678	0,59405
	3	-1.3678	0,59405	0,49926	-0,24457	-0,45241x10 ⁻¹	0,22616x10 ⁻¹
	4	-0,45241x10 ⁻¹	0,22616x10 ⁻¹	0,49926	-0,24457	0,84942x10 ⁻³	-0,42471x10 ⁻³
	5	-0,45241x10 ⁻¹	0,22616x10 ⁻¹	0,84942x10 ⁻³	-0,42471x10 ⁻³	-0,14215x10 ⁻⁶	0,71076x10 ⁻⁷
	6	-0,14215x10 ⁻⁶	0,71076x10 ⁻⁷	0,84942x10 ⁻³	-0,42471x10 ⁻³	0,97395x10 ⁻¹⁴	-0,48698x10 ⁻¹⁴

Regula Falsi Mod.	Iter	a	f(a)	b	f(b)	x	f(x)
	1	-9.0000	0,99975	10.000	-0,99991	0,49926	-0,24457
	2	-9.0000	0,99975	0,49926	-0,24457	-1.3678	0,59405
	3	-1.3678	0,59405	0,49926	-0,24457	-0,45241x10 ⁻¹	0,22616x10 ⁻¹
	4	-0,45241x10 ⁻¹	0,22616x10 ⁻¹	0,49926	-0,12229	0,39746x10 ⁻¹	-0,19870x10 ⁻¹
	5	-0,45241x10 ⁻¹	0,22616x10 ⁻¹	0,39746x10 ⁻¹	-0,19870x10 ⁻¹	-0,82400x10 ⁻⁶	0,41200x10 ⁻⁶
	6	-0,82400x10 ⁻⁶	0,41200x10 ⁻⁶	0,39746x10 ⁻¹	-0,19870x10 ⁻¹	0,10845x10 ⁻⁹	-0,54223x10 ⁻¹⁰

Müller	Iter	a	f(a)	m	f(m)	b	f(b)
	0	-9,0000	0,99975	0,50000	-0,24492	10,000	-0,99991
	1	-9,0000	0,99975	-1,7021	0,69162	0,50000	-0,24492
	2	-1,7021	0,69162	0,43130x10 ⁻²	-0,21565x10 ⁻²	0,50000	-0,24492
	3	-1,7021	0,69162	-0,26699x10 ⁻³	0,13350x10 ⁻³	0,43130x10 ⁻²	-0,21565x10 ⁻²
	4	-0,26699x10 ⁻³	0,13350x10 ⁻³	0,12657x10 ⁻⁶	-0,63286x10 ⁻⁷	0,43130x10 ⁻²	-0,21565x10 ⁻²
	5	-0,26699x10 ⁻³	0,13350x10 ⁻³	-0,36223x10 ⁻¹⁰	0,18112x10 ⁻¹⁰	0,12657x10 ⁻⁶	-0,63286x10 ⁻⁷
	6	-0,36223x10 ⁻¹⁰	0,18112x10 ⁻¹⁰	0,00000	0,00000	0,12657x10 ⁻⁶	-0,63286x10 ⁻⁷

Apartado (b) Métodos de iteración funcional

Para emplear los métodos de punto fijo, se debe seleccionar adecuadamente la función de forma que $\forall x \in (a,b): g(x) \in (a,b) \wedge \|g'(x)\| < 1$. Aunque en la mayoría de los casos, esa selección no

es simple, sí lo es en el ejemplo, puesto que $f'(0) = -\frac{1}{2}$, y la función se comporta de forma casi

lineal en un entorno de la raíz. Tomamos por tanto $g(x) = x + 2f(x)$, con lo cual se verifican las hipótesis. Por el contrario, el método de Newton no va a converger fuera de un entorno próximo a la raíz, pues la pendiente de la curva hace evolucionar a las soluciones hacia puntos con pendiente nula. Los métodos de la secante y Müller, adolecen del mismo mal, esto es, si los puntos iniciales del método se toman fuera de la zona lineal, el método evoluciona hacia puntos con pendiente nula y no converge. Aún así, el método de Müller se muestra más robusto que el de la secante.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 10 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Método	Punto fijo $x_0=10$	Newton: $x_0=-3$	Newton: $x_0=-2$	Secante: $x_0=3, x_1=4$	Secante: $x_0=2, x_1=3$	Müller: $x_0=3, x_1=4$
Iteración	$x_{n+1}=f(x_n)$	x_n	x_n	x_n	x_n	x_n
1	10,000	7,01787	1,62686	-12,373	-3,3053	-1,4030
2	8,0002	-551,187	-0,818805	-4,03666	-0,38966	-0,19259
3	6,0015	$1,19305 \times 10^{239}$	$0,946098 \times 10^{-1}$	227,90	0,37168	$0,63268 \times 10^{-1}$
4	4,0114	∞	$-0,141206 \times 10^{-3}$	109,89	$-0,21336 \times 10^{-3}$	$0,11526 \times 10^{-2}$
5	2,0825		$0,469462 \times 10^{-12}$	∞	$0,24492 \times 10^{-5}$	$-0,11682 \times 10^{-5}$
6	0,52576		0,0000		0,00000	$-0,71022 \times 10^{-11}$
7	$0,11786 \times 10^{-1}$					$9,42332 \times 10^{-18}$
8	$0,13642 \times 10^{-6}$					0,0000
9	0,00000					

Ejercicio 4.-

- (a) Demostrar el siguiente teorema (Nota: aplicar a cada lado de la igualdad el teorema del valor medio)

Sea $I = [r - \delta, r + \delta] \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ y r la raíz de $g(x) - h(x) = 0$ con $g(x), h(x) \in C^1(I)$

tales que $|g'(x)| \geq \alpha$ y $|h'(x)| \leq \beta$, donde $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ y $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ entonces para todo $x_0 \in I$ el método definido por $g(x_{k+1}) = h(x_k)$ converge a r .

- (b) Este teorema se utiliza en la generación de funciones de punto fijo que convergen a la raíz de una ecuación $f(x) = g(x) - h(x) = 0$ al transformarla en $x_{k+1} = g^{-1}(h(x_k))$.
Aplicarlo para calcular la raíz de $\sin(x) - (x - 2) = 0$ en el intervalo $(2.5, 3)$.

- (c) Calcular el número de iteraciones necesarias para obtener una precisión de 10^{-4} .

Apartado (a) Demostración

Puesto que r es raíz de $g(x) - h(x) = 0$, entonces $g(r) = h(r)$.

El método iterativo viene definido por $g(x_{k+1}) = h(x_k)$.

Restando ambas igualdades $g(x_{k+1}) - g(r) = h(x_k) - h(r)$

Aplicando el T^{ma} del valor medio a cada término de la igualdad

$$\exists \xi \in I : g(x_{k+1}) - g(r) = g'(\xi)(x_{k+1} - r) \rightarrow |g(x_{k+1}) - g(r)| \geq \alpha |x_{k+1} - r|$$

$$\exists \zeta \in I : h(x_k) - h(r) = h'(\zeta)(x_k - r) \rightarrow |h(x_k) - h(r)| \leq \beta |x_k - r|$$

Combinado ambas relaciones

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 11 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\alpha |x_{k+1} - r| \leq |g(x_{k+1}) - g(r)| = |h(x_k) - h(r)| \leq \beta |x_k - r| \rightarrow |x_{k+1} - r| \leq \frac{\beta}{\alpha} |x_k - r|$$

Repitiendo el proceso, se demuestra por inducción que

$$|x_{k+1} - r| \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k+1} |x_0 - r|$$

y tomando límites, teniendo en cuenta que $\frac{\beta}{\alpha} < 1$

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{k+1} - r| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k+1} |x_0 - r| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = r \quad \text{c.q.d.}$$

Apartado (b) Cálculo de la raíz de $\sin(x) - (x - 2) = 0$ en el intervalo $I = [2.5, 3] \subset \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Comenzamos verificando la existencia de raíz en ese intervalo. Sea $f(x) = \sin(x) - (x - 2)$, puesto que $f(2.5) = 0.0984\dots$ y $f(3) = -0.8588\dots$. El Teorema de Bolzano nos asegura la existencia.

Tomamos $g(x) = \sin(x)$ y $h(x) = x - 2$, y calculamos los valores de $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$.

$g'(x) = \cos(x)$ es monótona decreciente y negativa, luego $\forall x \in I : |\cos(x)| \geq |\cos(2.5)| > 0.8 = \alpha$

$h'(x) = 1$ es constante, luego $\forall x \in I : |1| \leq 1 = \beta$

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{0.8} > 1$ y no cumple las condiciones del teorema.

Probamos entonces con $g(x) = x - 2$ y $h(x) = \sin(x)$,

$g'(x) = 1$ es constante, luego $\forall x \in I : |1| \geq 1 = \alpha$

$h'(x) = \cos(x)$ es monótona decreciente y negativa, luego $\forall x \in I : |\cos(x)| \leq |\sin(3)| < 0.99 = \beta$

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{0.99}{1} < 1$ y verifica las condiciones del teorema.

Se tiene el método iterativo dado por

$$g(x_{k+1}) = h(x_k) \rightarrow x_{k+1} - 2 = \sin(x_k) \Rightarrow x_{k+1} = \sin(x_k) + 2$$

Partiendo del extremo izquierdo, se tiene la sucesión

{2.5, 2.5985, 2.5168, 2.5849, 2.5284, 2.5755, 2.5363, 2.5690, 2.5418, 2.5644, 2.5456, 2.5613, ...}

Si partimos del extremo derecho se obtiene

{3.0, 2.1411, 2.8417, 2.2954, 2.7488, 2.3828, 2.6880, 2.4382, 2.6468, 2.4748, 2.6185, 2.4996, ...}

En ambos casos se tiende a la raíz exacta situada en 2.55420057819374...

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 12 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (c) Cálculo del número de iteraciones

Sea la sucesión $\{x_k\}_0^\infty \rightarrow r$ generada mediante $x_{k+1} = g^{-1}(h(x_k))$, entonces

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = h(x_k) - h(x_{k-1}) \rightarrow |x_{k+1} - x_k| \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k |x_1 - x_0|.$$

Partimos de

$$g(x_m) - g(x_n) = h(x_{m-1}) - h(x_{n-1})$$

y como

$$\alpha |x_m - x_n| \leq g(x_m) - g(x_n) \text{ y}$$

$$h(x_{m-1}) - h(x_{n-1}) = h(x_{m-1}) - h(x_{m-2}) + h(x_{m-2}) - \dots - h(x_n) + h(x_n) - h(x_{n-1}), \text{ o bien}$$

$$\begin{aligned} |h(x_{m-1}) - h(x_{n-1})| &\leq |h(x_{m-1}) - h(x_{m-2})| + \dots + |h(x_{n+1}) - h(x_n)| + |h(x_n) - h(x_{n-1})| \\ &\leq \beta (|x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| + |x_n - x_{n-1}|) \\ &\leq \beta \left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{m-2} |x_1 - x_0| + \dots + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n |x_1 - x_0| + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} |x_1 - x_0| \right) \\ &\leq \beta \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

sustituyendo

$$\alpha |x_m - x_n| \leq |g(x_m) - g(x_n)| \leq |h(x_{m-1}) - h(x_{n-1})| \leq \beta \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} |x_1 - x_0|$$

y tomando límites

$$|r - x_n| = \lim_{m \rightarrow \infty} |x_m - x_n| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} |x_1 - x_0|$$

Por tanto, para calcular el número de iteraciones necesarias para obtener una precisión de 10^{-4} será necesario que

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 13 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$|r - x_n| = \lim_{m \rightarrow \infty} |x_m - x_n| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} |x_1 - x_0| < \varepsilon \rightarrow n > \frac{\ln \left(\frac{\varepsilon \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right)}{|x_1 - x_0|} \right)}{\ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)}$$

Sustituyendo los valores

$$n > \frac{\ln \frac{10^{-4} (1 - 0.99)}{|2.5985 - 2.5|}}{\ln(0.99)} > 1144.02 = 1145$$

Ejercicio 5.- La velocidad de descenso de un paracaídas viene dada por

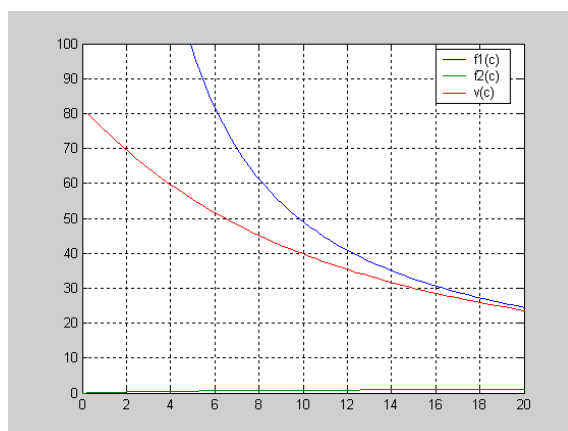
$$v = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-ct/m} \right)$$

donde g es la aceleración de la gravedad (9.81 m/s^2), m la masa soportada, t el tiempo y c el coeficiente de arrastre, viniendo dados todos los valores en S.I.

- Representar, de forma aproximada, la velocidad como función del coeficiente de arrastre
- Seleccionar un método de intervalo para determinar el valor de c para que un paracaídas que soporta 50 Kg alcance una velocidad de 30 m/s en 5 minutos. Realizar 4 iteraciones de Regula Falsi Modificada ¿Presenta alguna ventaja?. (Nota: utilizar decenas para determinar el intervalo).
- ¿Se puede asegurar la convergencia del método de Newton en el intervalo $[10, 20]$?

Apartado (a) Representación de la función

La curva pedida se puede obtener como combinación del producto de una hipérbola $f_1(x) = \frac{gm}{x}$ por una exponencial $f_2(x) = 1 - e^{-xt/m}$. Su representación se muestra en la siguiente figura.



Representación de la velocidad dependiendo del coeficiente de arrastre

Apartado (b) Cálculo del coeficiente de arrastre

A la vista de la representación, se puede utilizar cualquier método de intervalo. Dada la convexidad de la función, Regula Falsi sólo disminuye un extremo del intervalo, por lo que será preferible utilizar Regula Falsi Modificada. El método de Muller, al ajustar mejor la curvatura de la función, requerirá menos operaciones, aunque más laboriosas. De todas formas probaremos con todos los métodos hasta que alcanzan un error de centésimas para verificar las aseveraciones anteriores.

Comenzamos buscando un intervalo que cumpla las condiciones de Bolzano (cambio de signo en los extremos). La función a estudiar será

$$f(x) = \frac{490.5}{x}(1 - e^{-6x}) - 30 \text{ luego}$$

$$f(10) = \frac{490.5}{10}(1 - e^{-60}) - 30 = 19.05$$

$$f(20) = \frac{490.5}{20}(1 - e^{-120}) - 30 = -5.4750$$

Bisección

La sucesión se genera como $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

$$x_1 = \frac{10 + 20}{2} = 15 \rightarrow f(15) > 0$$

$$x_2 = \frac{15 + 20}{2} = 17.5 \rightarrow f(17.5) < 0$$

$$x_3 = \frac{15 + 17.5}{2} = 16.25 \rightarrow f(16.25) > 0$$

$$x_4 = \frac{16.25 + 17.5}{2} = 16.875 \rightarrow f(16.875) < 0$$

Bisección	Iteración	a	f(a)	b	f(b)	x	f(x)
	1	10.0000	+	20.0000	-	15.0000	+
	2	15.0000	+	20.0000	-	17.5000	-
	3	15.0000	+	17.5000	-	16.2500	+
	4	16.2500	+	17.5000	-	16.8750	-
	5	16.2500	+	16.8750	-	16.5625	-
	6	16.2500	+	16.5625	-	16.4063	-
	7	16.2500	+	16.4063	-	16.3281	+
	8	16.3281	+	16.4063	-	16.3672	-
	9	16.3281	+	16.3672	-	16.3477	+

Regula Falsi

La sucesión se genera como $x_n = a_n - f(a_n) \frac{a_n - b_n}{f(a_n) - f(b_n)}$

$$x_1 = 10 - f(10) \frac{10 - 20}{f(10) - f(20)} = 10 - 19.05 \frac{10 - 20}{19.05 + 5.475} = 17.7676 \rightarrow f(17.7676) = -2.3935$$

$$x_2 = 10 - 19.05 \frac{10 - 17.7676}{19.05 + 2.3935} = 16.9006 \rightarrow f(16.9006) = -0.9773$$

$$x_3 = 10 - 19.05 \frac{10 - 16.9006}{19.05 + 0.9773} = 16.5638 \rightarrow f(16.5638) = -0.3873$$

$$x_4 = 10 - 19.05 \frac{10 - 16.5638}{19.05 + 0.3873} = 16.4330 \rightarrow f(16.4330) = -0.1516$$

Regula Falsi	Iteración	a	f(a)	b	f(b)	x	f(x)
	1	10	19.0500	20	-5.4750	17.7676	-2.3935
	2	10	19.0500	17.7676	-2.3935	16.9006	-0.9773
	3	10	19.0500	16.9006	-0.9773	16.5638	-0.3873
	4	10	19.0500	16.5638	-0.3873	16.4330	-0.1516
	5	10	19.0500	16.4330	-0.1516	16.3823	-0.0591
	6	10	19.0500	16.3823	-0.0591	16.3625	-0.0230
	7	10	19.0500	16.3625	-0.0230	16.3549	-0.0089

Regula Falsi Modificada

La sucesión se genera igual que la anterior, pero partiendo sucesivamente el valor de la función en el extremo opuesto a aquel en que se repite la sustitución

$$x_1 = 10 - f(10) \frac{10 - 20}{f(10) - f(20)} = 10 - 19.05 \frac{10 - 20}{19.05 + 5.475} = 17.7676 \rightarrow f(17.7676) = -2.3935$$

$$x_2 = 10 - 19.05 \frac{10 - 17.7676}{19.05 + 2.3935} = 16.9006 \rightarrow f(16.9006) = -0.9773$$

$$x_3 = 10 - 9.525 \frac{10 - 16.9006}{9.525 + 0.9773} = 16.2584 \rightarrow f(16.2584) = 0.1690$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 16 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$x_4 = 16.2584 - 0.1690 \frac{16.2584 - 16.9006}{0.1690 + 0.9773} = 16.3531 \rightarrow f(16.3531) = -0.0057$$

Regula Falsi Mod.	Iteración	a	f(a)	b	f(b)	x	f(x)
	1	10.0000	19.0500	20.0000	-5.4750	17.7676	-2.3935
	2	10.0000	19.0500	17.7676	-2.3935	16.9006	-0.9773
	3	10.0000	9.5250	16.9006	-0.9773	16.2584	0.1690
	4	16.2584	0.1690	16.9006	-0.9773	16.3531	-0.0057

Muller

En este caso, la aproximación de la función se hace mediante un polinomio de segundo grado que pasa por tres puntos $\{a, b, m\}$. Se comienza calculando los coeficientes de la parábola

$\alpha_2(x-m)^2 + \alpha_1(x-m) + \alpha_0$ mediante el sistema

$$\begin{pmatrix} (a-m)^2 & a-m & 1 \\ (b-m)^2 & b-m & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f(m) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = f(m) \\ \begin{pmatrix} (a-m)^2 & a-m \\ (b-m)^2 & b-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) - f(m) \\ f(b) - f(m) \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ y por tanto}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} \quad \text{con} \quad \Delta = \begin{vmatrix} (a-m)^2 & a-m \\ (b-m)^2 & b-m \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} (a-m)^2 & f(a) - f(m) \\ (b-m)^2 & f(b) - f(m) \end{vmatrix} \quad \text{y}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f(a) - f(m) & a-m \\ f(b) - f(m) & b-m \end{vmatrix}$$

Una vez obtenidos los coeficientes, se calculan los puntos de corte con el eje X utilizando la fórmula alternativa

$$r = m - \frac{2\alpha_0}{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}$$

y eligiendo el signo de la raíz de forma que el valor absoluto del denominador sea lo mayor posible. La raíz así calculada estará entre m y uno de los extremos a ó b ; si está entre m y a (respectivamente b), se sustituye b (respectivamente a) por m y m por r .

Comenzamos el algoritmo añadiendo a los dos extremos, el punto medio

$$m = \frac{b-a}{2} = 15 \rightarrow f(m) = 2.7$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5^2 & -5 \\ 5^2 & 5 \end{vmatrix} = 250 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 25 & 16.35 \\ 25 & -8.175 \end{vmatrix} = -613.125 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 16.35 & -5 \\ -8.175 & 5 \end{vmatrix} = 40.875$$

$$\alpha_0 = 2.7, \alpha_1 = \frac{-613.125}{250} = -2.4525, \alpha_2 = \frac{40.875}{250} = 0.1635 \text{ y}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 17 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$r = 15 - \frac{2 \cdot 2.7}{-2.4525 - \sqrt{2.4525^2 - 4 \cdot 2.7 \cdot 0.1635}} = 16.1963 \rightarrow f(r) = 0.2846$$

Si se hubiera elegido el signo positivo de la raíz, el valor obtenido se saldría del intervalo (28.8037). Los nuevos puntos son 15, 16.1963 y 20. Por tanto $\alpha_0 = 0.2846$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1.4312 & -1.1963 \\ 14.4679 & 3.8037 \end{vmatrix} = 22.7522, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1.4312 & 2.4154 \\ 14.4679 & -5.7596 \end{vmatrix} = -43.1885 \text{ y } \alpha_1 = -1.8982$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2.4154 & -1.1963 \\ -5.7596 & 3.8037 \end{vmatrix} = 2.2968 \text{ y } \alpha_2 = 0.1009$$

$$r = 19.193 - \frac{2 \cdot 0.2846}{-1.8982 - \sqrt{1.8982^2 - 4 \cdot 0.2846 \cdot 0.1009}} = 16.3475 \rightarrow f(r) = 0.0046$$

Müller	Iteración	a	f(a)	m	f(m)	b	f(b)
	0	10.0000	19.0500	15.0000	2.7000	20.0000	-5.4750
	1	15.0000	2.7000	16.1963	0.2846	20.0000	-5.4750
	2	16.1963	0.2846	16.3475	0.0046	20.0000	-5.4750

Apartado (c) Aplicabilidad de Newton

Las condiciones generales de convergencia del método de Newton vienen dadas para $f(x) \in C^2[a, b]$ por

1. $f(a)f(b) < 0$ Se cumple en $[10, 20]$, como se ha visto en el apartado anterior

2. $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ $f'(x) = -\frac{490.5}{x^2}(1 - e^{-6x} - 6xe^{-6x})$ y puesto que $\forall x \in [10, 20]: e^{-6x} \leq e^{-60} < 8.7 \times 10^{-27} \approx 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

3. $\text{signo}(f''(x)) = \text{cte} \forall x \in [a, b]$ $f''(x) = 2\frac{490.5}{x^3}(1 - e^{-6x}) + 2\frac{-490.5}{x^2}6e^{-6x} + \frac{490.5}{x}(-36e^{-6x}) = \frac{490.5}{x^3}(2 - 2e^{-6x} - 12xe^{-6x} - 36x^2e^{-6x}) > 0 \forall x \in [10, 20]$

4. $\max \left\{ \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right|, \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| \right\} \leq |b - a|$ $\max \left\{ \left| \frac{19.0500}{4.9050} \right|, \left| \frac{-5.4750}{-1.2263} \right| \right\} \approx 4.46 \leq |b - a| = 10$

Luego el método de Newton converge.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 18 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 6.- Dada la función $f(x) = x \cos(x) - e^x + 1$

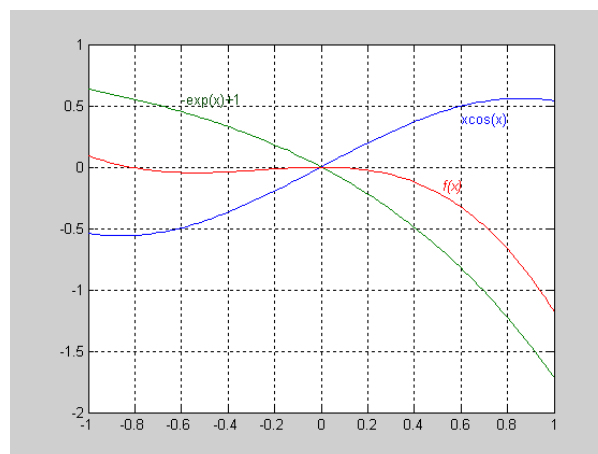
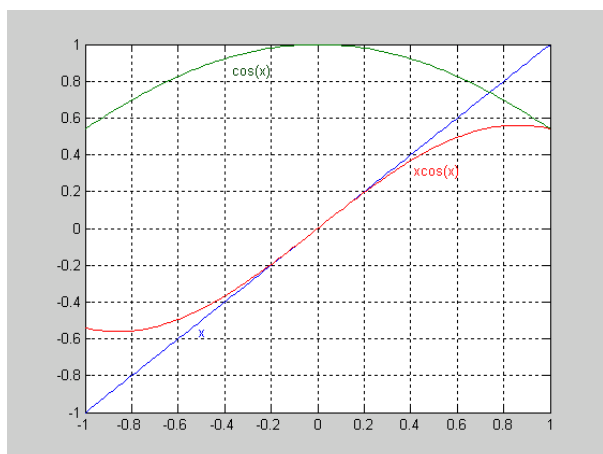
- Representarla de forma aproximada en el intervalo $[-1, 1]$.
- Obtener el desarrollo de Taylor en el origen de la función.
- A partir del desarrollo anterior, seleccionar el método de intervalo más adecuado para su resolución en el subintervalo $[a, b] \subseteq [-0.5, 0.5]$, justificando la respuesta.
- Analizar las siguientes funciones de punto fijo, comprobando su consistencia con la ecuación $f(x)=0$ y la convergencia del método en $[-0.5, 0.5]$ y, en su caso, la velocidad de convergencia.

$$g_1(x) = \frac{e^x + x - 1}{1 + \cos(x)} \quad g_2(x) = \sqrt{\frac{x(e^x - 1)}{\cos(x)}}$$

- ¿Cuál sería el método más adecuado para resolver la ecuación?. Razónese la propuesta.

Apartado (a) Representación

La forma más simple es representarla a partir de las funciones elementales que la componen:



Esa información cualitativa debe completarse, si es posible, con máximos y mínimos. En este caso, ambos casos dan ecuaciones trascendentes, irresolubles de forma analítica, por lo que usamos información cualitativa:

$$f(x) = x \cos(x) - e^x + 1 \quad f(-1) = 0.0918, f(0) = 0, f(1) = -1.1780$$

$$f'(x) = \cos(x) - x \sin(x) - e^x = 0 \quad f'(-1) = -0.6690, f'(0) = 0, f'(1) = -3.0195$$

$$f''(x) = -2 \sin(x) - x \cos(x) - e^x \quad f''(-1) = 1.8554, f''(0) = -1, f''(1) = -4.9415$$

La función es positiva y decreciente en -1 , tiene un punto de inflexión en 0 y se hace negativa y decreciente en 1 .

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 19 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (b) Desarrollo de Taylor de la función

El desarrollo en el origen viene dado por $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$$f(x) = x \cos(x) - e^x + 1 \rightarrow f(0) = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) - x \sin(x) - e^x \rightarrow f'(0) = 1 - 0 - 1 = 0$$

$$f''(x) = -2 \sin(x) - x \cos(x) - e^x \rightarrow f''(0) = 0 - 0 - 1 = -1$$

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} k \text{ par} & (-1)^{k/2} (k \sin(x) + x \cos(x)) - e^x \rightarrow f^{(k)}(0) = -1 \\ k \text{ impar} & (-1)^{(k-1)/2} (k \cos(x) - x \sin(x)) - e^x \rightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1/2} k - 1 \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{4}{5!}x^5 + o(x^5) = P_5(x) + o(x^5)$$

Este mismo resultado se hubiera alcanzado si se hubiera partido del desarrollo de Taylor de las funciones simples que la componen:

$$f(x) = x \cos(x) - e^x + 1 = x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right) + 1$$

Apartado (c) Métodos de intervalo

Comprobamos los signos de la función en los extremos

$$f(-0.5) = -0.5 \cos(-0.5) - e^{-0.5} + 1 \approx -0.0453 \text{ y } f(0.5) = 0.5 \cos(0.5) - e^{0.5} + 1 \approx -0.2099.$$

No cambia de signo en los extremos, lo que significa que el número de raíces existentes es par o nulo. Despreciando términos de orden superior, analizamos el comportamiento de $P_5(x)$.

$$P_5(0) = 0 \quad \text{Se anula en el origen}$$

$$P_5'(0) = 0 \quad \text{Hay máximo o mínimo en el origen}$$

$$P_5'(x) = -x - 2x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{3!}x^4 < 0 \forall x \in [0, 0.5] \quad \text{Es decreciente a la derecha del origen}$$

$P_5'(x) < 0 \forall x \in [-0.5, 0]$ Es creciente a la izquierda del origen pues $-x - 2x^2 \geq 0$ en ese intervalo.

En resumen, la función tiene en $x=0$ una raíz doble y no cambia de signo en el intervalo dado. No es por tanto aplicable ningún método de intervalo, al no existir intervalos en que se puedan aplicar las condiciones del Teorema del Valor Intermedio.

Apartado (d) Análisis de punto fijo

Recordamos las condiciones a analizar

Consistencia Sea $c \in [a, b]: P(c) = 0 \Rightarrow c = g(c)$,

Convergencia

- $g(x) \in C^1[a, b]$
- $\forall x \in [a, b]: g(x) \in [a, b]$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 20 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\text{iii. } \forall x \in [a, b]: |g'(x)| \leq k < 1$$

Orden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c - x_{n+1}|}{|c - x_n|^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^k} = L$$

Consistencia

$$f(x) = x \cos(x) - e^x + 1$$

$$f(c) = c \cos(c) - e^c + 1 = 0 \rightarrow e^c - 1 = c \cos(c) \rightarrow e^c + c - 1 = c + c \cos(c) \rightarrow \frac{e^c + c - 1}{1 + \cos(c)} = c = g_1(c)$$

$$f(c) = c \cos(c) - e^c + 1 = 0 \rightarrow \frac{c^2 \cos(c)}{c} = e^c - 1 \rightarrow c^2 = \frac{c(e^c - 1)}{\cos(c)} \rightarrow c = \sqrt{\frac{c(e^c - 1)}{\cos(c)}} = g_2(c)$$

Continuidad

$$g_1(x) \in C[-0.5, 0.5]$$

$$g_2(x) = \sqrt{\frac{x(e^x - 1)}{\cos(x)}} \rightarrow \frac{x(e^x - 1)}{\cos(x)} \geq 0 \forall x \in [-0.5, 0.5]$$

Contractividad

$$g_1([-0.5, 0.5]) = \left[\frac{e^{-0.5} - 0.5 - 1}{1 + \cos(-0.5)}, \frac{e^{0.5} + 0.5 - 1}{1 + \cos(0.5)} \right] = [-0.4759, 0.6118] \not\subset [-0.5, 0.5]$$

$$g_2([-0.5, 0.5]) = \left[\sqrt{\frac{-0.5(e^{-0.5} - 1)}{\cos(-0.5)}}, \sqrt{\frac{0.5(e^{0.5} - 1)}{\cos(0.5)}} \right] = [0.4735, 0.6080] \not\subset [-0.5, 0.5]$$

Al no ser contractiva ninguna de las funciones, no es necesario comprobar el resto de las hipótesis.

Apartado (e) Método óptimo

Si consideramos como tal el de mayor velocidad de convergencia, deberíamos elegir el método de Newton, cuya convergencia para $0 < x < 0.5$ se comprueba de forma gráfica.

La función es creciente a la izquierda del origen (estudiado mediante $P(x)$), y puesto que $f'(-0.5) = 0.0313$, su derivada no se anula en el intervalo. Por otro lado, se comprueba que

$$\forall x_0 \in [-0.5, 0]: x_1 = g(x_0) = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \geq 0$$

y el método, como en el caso anterior, converge.

De todas formas, teniendo en cuenta que la raíz es doble, se impone cualquiera de las modificaciones del método de Newton, esto es

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 21 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$g_1(x) = x - 2 \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ o bien } g_2(x) = x - \frac{f(x) f'(x)}{(f'(x))^2 - f(x) f''(x)}$$

	$x_k = g_1(x_{k-1})$	$x_k = g_1(x_{k-1})$	$x_k = g_2(x_{k-1})$	$x_k = g_2(x_{k-1})$	$x_k = g(x_{k-1})$	$x_k = g(x_{k-1})$
x ₀	-0.5	0.5	-0.5	0.5	-0.5	0.5
x ₁	2.3924	0.0846	-0.4614	-0.0551	0.9462	0.2923
x ₂	0.6344	0.0041	-0.3825	-0.0023	0.5755	0.1645
x ₃	0.1196		-0.2366		0.3398	0.0891
x ₄	0.0078		-0.0667		0.1932	0.0468
x ₅					0.1057	0.0241
x ₆					0.0560	0.0122
x ₇					0.0289	0.0062
x ₈					0.0147	
x ₉					0.0074	

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 22 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Utilice el teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle para demostrar que la gráfica de $f(x) = x^3 + 2x + k$ cruza el eje x exactamente una vez, cualquiera que sea el valor de la constante k .

Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}^- : f(x) = x^3 + 2x + k < 2x + k$, y por tanto, $\forall x < x_1 = \min(0, -\frac{1}{2k}) : f(x) < 0$

Asimismo $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) = x^3 + 2x + k > 2x + k$, y por tanto, $\forall x > x_2 = \max(0, -\frac{1}{2k}) : f(x) > 0$.

Como $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ por ser un polinomio, podemos aplicar el teorema del valor intermedio o el Teorema de Bolzano, obteniendo $\exists c \in (x_1, x_2) : f(c) = 0$, lo que demuestra la existencia de al menos una raíz.

Supongamos que existen dos raíces, c y c' , esto es, $f(c) = f(c') = 0$. Aplicando el Teorema de Rolle, debe existir un punto $\eta \in (x_1, x_2) : f'(\eta) = 0$. Pero $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, lo que demuestra que $c = c'$.

Ejercicio 7.- Sea $f(x) = (x+2)(x+1)^2 x(x-1)^3(x-2)$. ¿Hacia qué cero converge el método de bisección en los siguientes casos?

- (a) Intervalo $[-1.5, 2.5]$
- (b) Intervalo $[-0.5, 2.4]$
- (c) Intervalo $[-0.5, 3]$
- (d) Intervalo $[-3, -0.5]$

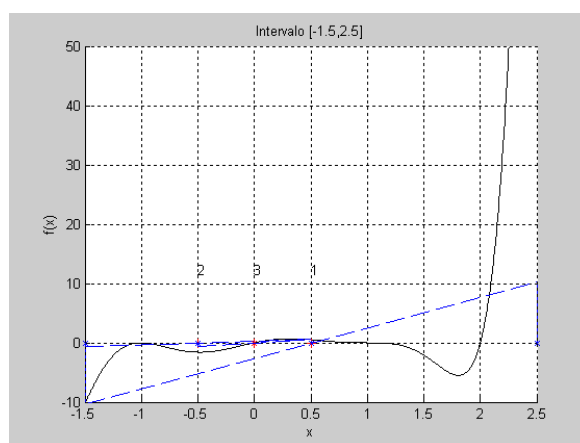
Apartado (a) Intervalo $[-1.5, 2.5]$

Puesto $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ por ser un polinomio, sólo debemos comprobar que la función tiene signo distinto en los extremos del intervalo.

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{-3}{2} \left(\frac{-5}{2}\right)^3 \left(\frac{-7}{2}\right) < 0 \text{ y } f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)^2 \frac{5}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$

Aplicando el método

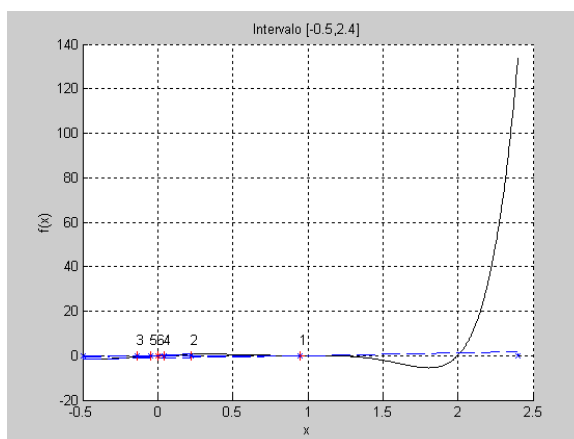
a	$f(a)$	b	$f(b)$	m	$f(m)$
-1.5000	-	2.5000	+	0.5000	+
-1.5000	-	0.5000	+	-0.5000	-
-0.5000	-	0.5000	+	0.0000	0



Converge a la raíz $x=0$ saltándose las raíces en -1 , 1 y 2 .

Apartado (b) Intervalo $[-0.5, 2.4]$

a	$f(a)$	b	$f(b)$	m	$f(m)$
-0.5000	-	2.4000	+	0.9500	+
-0.5000	-	0.9500	+	0.2250	+
-0.5000	-	0.2250	+	-0.1375	-
-0.1375	-	0.2250	+	0.0437	+
-0.1375	-	0.0437	+	-0.0469	-
-0.0469	-	0.0437	+	-0.0016	-
-0.0016	-	0.0437	+	0.0211	+

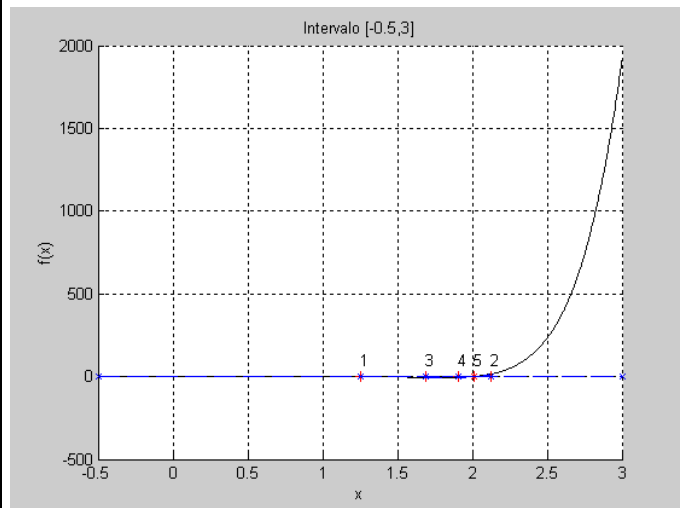


 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 24 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

En este caso también converge hacia la raíz $x=0$, pero de forma más lenta, saltándose las raíces en 1 y 2

Apartado (c) Intervalo $[-0.5, 3]$

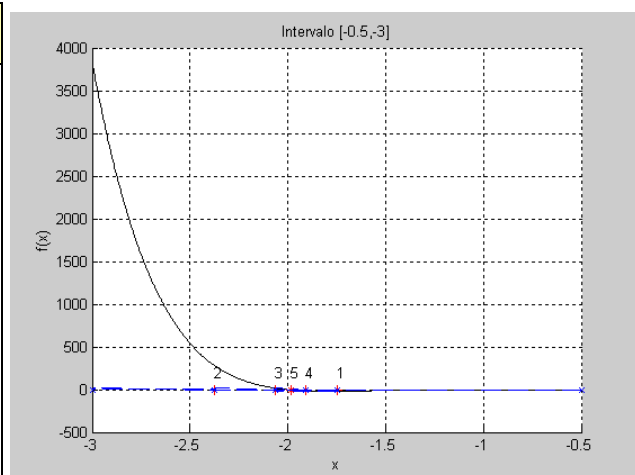
a	$f(a)$	b	$f(b)$	m	$f(m)$
-0.5000	-	3.0000	+	1.2500	-
1.2500	-	3.0000	+	2.1250	+
1.2500	-	2.1250	+	1.6875	-
1.6875	-	2.1250	+	1.9063	-
1.9063	-	2.1250	+	2.0156	+
1.9063	-	2.0156	+	1.9609	-
1.9609	-	2.0156	+	1.9883	-
1.9883	-	2.0156	+	2.0020	+
1.9883	-	2.0020	+	1.9951	-
1.9951	-	2.0020	+	1.9985	-



En este caso converge hacia la raíz $x=2$, saltándose las raíces en 0 y 1.

Apartado (d) Intervalo $[-3, -0.5]$

a	$f(a)$	b	$f(b)$	m	$f(m)$
-0.5000	-	-3.0000	+	-1.7500	-
-1.7500	-	-3.0000	+	-2.3750	+
-1.7500	-	-2.3750	+	-2.0625	+
-1.7500	-	-2.0625	+	-1.9063	-
-1.9063	-	-2.0625	+	-1.9844	-
-1.9844	-	-2.0625	+	-2.0234	+
-1.9844	-	-2.0234	+	-2.0039	+
-1.9844	-	-2.0039	+	-1.9941	-
-1.9941	-	-2.0039	+	-1.9990	-
-1.9990	-	-2.0039	+	-2.0015	+



En este caso converge hacia la raíz $x=-2$, saltándose las raíces en 1.

En estos ejemplos se observa que pese a manejar intervalos similares, las iteraciones convergen hacia raíces distintas, si bien nunca lo hacen hacia las raíces de orden par.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 25 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 8.- Dadas las siguientes funciones

$$g_1(x) = \sqrt[4]{3+x-2x^2} \quad \left| \quad g_2(x) = \sqrt{\frac{x+3-x^4}{2}} \quad \left| \quad g_3(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2+2}} \quad \left| \quad g_4(x) = \frac{3x^4+2x^2+3}{4x^3+4x-1} \right. \right.$$

obtenidas mediante despeje de la ecuación $f(x)=0$, donde $f(x)=x^4+2x^2-x-3$.

- Use el manejo algebraico para demostrar que tienen un punto fijo en p , siendo p una raíz de $f(x)$.
- Sea $p_0=1$ y $p_n=g(p_{n-1})$ para $n \in \mathbb{N}$. Efectúe, si es posible, cinco iteraciones con las funciones g definidas en el ejercicio anterior. ¿Qué función a su juicio, dará la mejor aproximación a la solución?
- Clasifíquense por orden, basándose en la rapidez de convergencia

Apartado (a) Demostración de punto fijo

Existen dos posibilidades para demostrar la relación. Se puede partir de $f(x)$, y despejando llegar a la relación $g_1(x) = x$, o bien a partir de la función $g_k(x) = x$, obtener la ecuación inicial.

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow x^4 = 3 + x - 2x^2 \rightarrow x = \sqrt[4]{3+x-2x^2} = g_1(x)$$

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow 2x^2 = 3 + x - x^4 \rightarrow x = \sqrt{\frac{3+x-x^4}{2}} = g_2(x)$$

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow x^2(x^2 + 2) = 3 + x \rightarrow x^2 = \frac{3+x}{x^2+2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{3+x}{x^2+2}} = g_3(x)$$

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3 = (4x^4 - 3x^4) + (4x^2 - 2x^2) - x - 3 = x(4x^3 + 4x - 1) - (3x^4 + 2x^2 + 3) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow x = \frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1} = g_4(x)$$

Apartado (b) Iteraciones

Representando los valores obtenidos con 4 cifras decimales, se obtiene la siguiente tabla:

Iteración	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	1.1892	1.2247	1.1547	1.1429
2	1.0801	0.9937	1.1164	1.1245
3	1.1497	1.2286	1.1261	1.1241
4	1.1078	0.9875	1.1236	1.1241
5	1.1339	1.2322	1.1242	1.1241

La mejor aproximación parece darla g_4 , puesto que se estabiliza tras cinco iteraciones.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 26 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (c) Velocidad de convergencia

Puesto que no conocemos las raíces de la función, no podemos saber cual es la mejor aproximación. Pero podemos utilizar una primera estimación basándonos en la relación $|x_n - x_{n-1}|$. Comparando estos resultados, se tiene

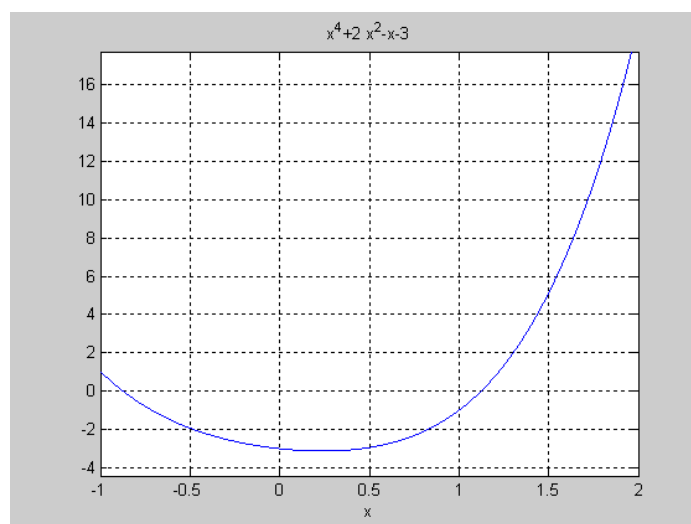
Iteración	$ g_1(x_n) - x_n $	$ g_2(x_n) - x_n $	$ g_3(x_n) - x_n $	$ g_4(x_n) - x_n $
1	0.1892	0.2247	0.1547	0.1429
2	-0.1091	-0.2311	-0.03827×10^{-1}	-0.1837×10^{-1}
3	0.6961×10^{-1}	0.2349	0.9625×10^{-2}	-0.3585×10^{-3}
4	-0.4185×10^{-1}	-0.2411	-0.2413×10^{-2}	-0.1342×10^{-6}
5	0.2611×10^{-1}	0.2447	0.6056×10^{-3}	-0.2000×10^{-13}

A la vista de los resultados, las funciones g_4 , g_3 y g_1 parecen dar lugar a métodos convergentes, ordenadas de mayor a menor velocidad de convergencia. La función g_2 no parece converger. Observando más atentamente las funciones, se observa que

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^4 + 2x^2 - x - 3}{4x^3 + 4x - 1} = \frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1} = g_4(x)$$

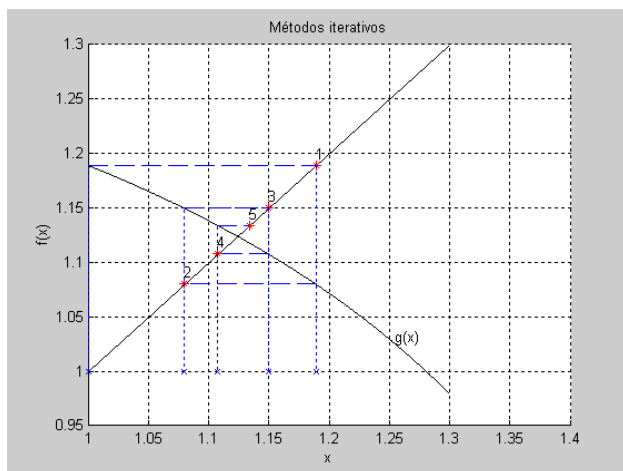
esto es, la función $g_4(x)$ es la obtenida mediante el método de Newton-Raphson, y su velocidad de convergencia es cuadrática, salvo raíces múltiples.

Representando gráficamente la función inicial, observamos que presenta dos raíces reales y dos complejas conjugadas.

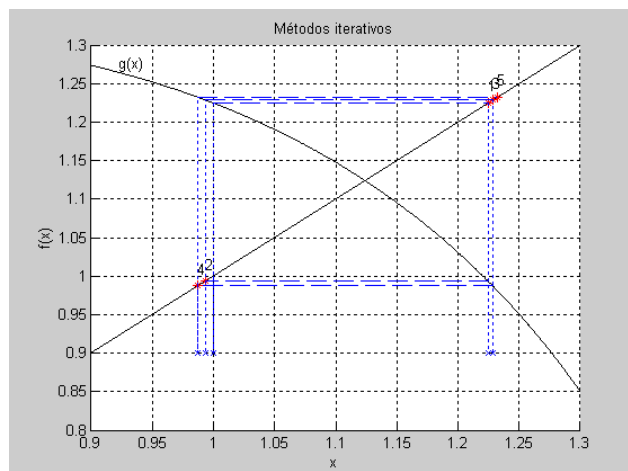


Representación de la función inicial

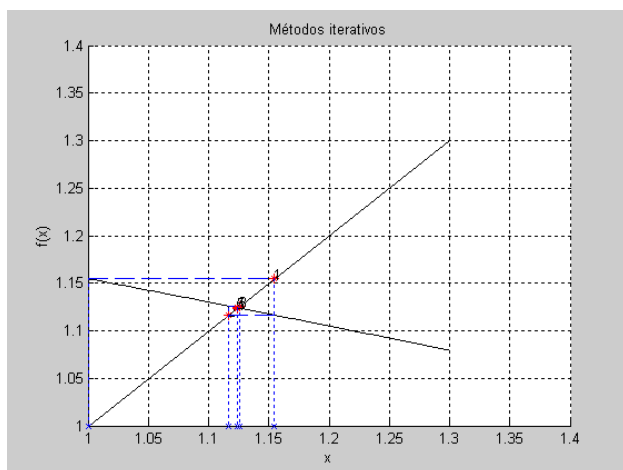
Asimismo se puede representar la evolución de las iteraciones de cada una de las cuatro funciones de punto fijo:



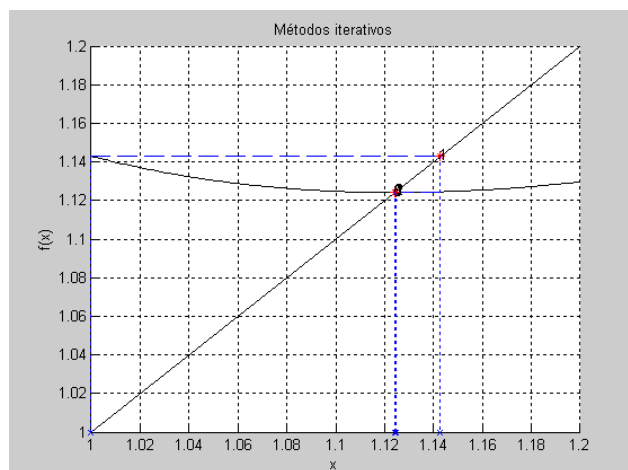
$g_1(x)$ Sucesión de valores es convergente



$g_2(x)$ Sucesión de valores es divergente



$g_3(x)$ Sucesión de valores converge a mayor velocidad que $g_1(x)$



$g_4(x)$ Sucesión de valores con mayor velocidad de convergencia

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 28 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 9.- Dada la ecuación $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x = 0$

- (a) Resuélvala utilizando el método de Newton, tomando como valor de partida $p_0 = \pi/2$. Realice las iteraciones necesarias hasta lograr una exactitud de 10^{-5} . Explique por qué el resultado parece poco usual para el método de Newton.
- (b) Repita el proceso tomando como valores de partida $p_0 = 5\pi$ y $p_0 = 10\pi$.
- (c) ¿Hay alguna manera de acelerar el método de Newton?. En caso afirmativo, aplicarla partiendo de los mismos valores iniciales.

Apartado (a) Demostración de punto fijo

El método de Newton se formula como sigue $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, en nuestro caso

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x \text{ y } f'(x) = \frac{1}{2}x - \sin x - x \cos x + \sin 2x$$

Desarrollando llegamos a la expresión siguiente:

$$x_{n+1} = \frac{\frac{1}{4}x^2 + x(\sin 2x - x \cos x) + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x - \sin x - x \cos x + \sin 2x}. \text{ La tabla de iteraciones es la siguiente:}$$

$X_0 = \pi/2$	$X_5 = 1.88946376$	$X_{10} = 1.89530703$	$X_{15} = 1.89548735$
$X_1 = 1.78539816$	$X_6 = 1.89248962$	$X_{11} = 1.89540061$	$X_{16} = 1.89549139$
$X_2 = 1.84456162$	$X_7 = 1.89399456$	$X_{12} = 1.89544746$	$X_{17} = 1.89549149$
$X_3 = 1.87083441$	$X_8 = 1.89475061$	$X_{13} = 1.89547084$	
$X_4 = 1.88334642$	$X_9 = 1.89119816$	$X_{14} = 1.89548245$	

Aunque depende de la aproximación el método de Newton es muy poderoso y es poco usual un número tan grande de iteraciones.

Aproximación $x_0 = 5\pi$

La tabla de iteraciones es la siguiente

$X_0 = 5\pi$	$X_6 = 1.84994027$	$X_{12} = 1.89481974$	$X_{18} = 1.89548346$
$X_1 = 13.0899939$	$X_7 = 1.87335741$	$X_{13} = 1.89515714$	$X_{19} = 1.89548826$
$X_2 = 21.3475720$	$X_8 = 1.88457205$	$X_{14} = 1.89532572$	$X_{20} = 1.89548846$
$X_3 = 17.4729272$	$X_9 = 1.89006820$	$X_{15} = 1.89541000$	
$X_4 = 1.64868203$	$X_{10} = 1.89278981$	$X_{16} = 1.89545200$	
$X_5 = 1.79806359$	$X_{11} = 1.89414416$	$X_{17} = 1.89547300$	

Aproximación $x_0 = 10\pi$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 29 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

La tabla de iteraciones es la siguiente y se comprobará que en este caso el método no converge.

$X_0=10\pi$	$X_3=20.634954$	$X_6=1923.5204$	$X_9=3298.0063$
$X_1=47.123889$	$X_4=14.084490$	$X_7=5168.3712$	$X_{10}=6178.6160$
$X_2=39.269908$	$X_5=7.3295392$	$X_8=4245.1925$	

Resolución del ejercicio por el método de la secante. La expresión responde a lo siguiente:

$$f(x_n) = x_{n-1} - \left(\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} x_{n-1}^2 - x_{n-1} \sin x_{n-1} - \frac{1}{2} \cos 2x_{n-1} \right) (x_{n-1} - x_{n-2})}{\left(\frac{1}{4} (x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2) + \frac{1}{2} (\cos 2x_{n-2} - \cos 2x_{n-1}) + x_{n-2} \sin x_{n-2} - x_{n-1} \sin x_{n-1} \right)} \right)$$

La tabla de iteraciones es la siguiente, tomando como aproximaciones las dos primeras del método de Newton.

$X_0=\pi/2$	$X_6=1.8861519$	$X_{12}=1.8949796$	$X_{12}=1.8949796$
$X_1=1.7853981$	$X_7=1.8897547$	$X_{13}=1.8951762$	$X_{13}=1.8951762$
$X_2=1.8246235$	$X_8=1.8919537$	$X_{14}=1.8952977$	$X_{14}=1.8952977$
$X_3=1.8548351$	$X_9=1.8933101$	$X_{15}=1.8953727$	$X_{15}=1.8953727$
$X_4=1.8704957$	$X_{10}=1.8941455$	$X_{16}=1.8954191$	$X_{16}=1.8954191$
$X_5=1.8803043$	$X_{11}=1.8946612$	$X_{17}=1.8954908$	$X_{17}=1.8954908$
$X_{18}=1.8954908$			

Podemos comprobar que este método de la secante es un poco mas lento que el de Newton, es debido a su menor velocidad de convergencia.

Para el caso de la aproximación $x_0=5\pi$ tenemos:

$X_0=5\pi$	$X_8=1.1933264$	$X_{16}=1.8840542$	$X_{24}=1.8953451$
$X_1=13.0899693$	$X_9=1.2029347$	$X_{17}=1.8884252$	$X_{25}=1.8953451$
$X_2=9.3483432$	$X_{10}=1.3460397$	$X_{18}=1.8911474$	$X_{26}=1.8954019$
$X_3=4.1300745$	$X_{11}=1.4783469$	$X_{19}=1.8928110$	$X_{27}=1.8954372$
$X_4=0.8594522$	$X_{12}=1.8228407$	$X_{20}=1.8938383$	$X_{28}=1.8954587$
$X_5=0.8165007$	$X_{13}=1.8407178$	$X_{21}=1.8944714$	$X_{29}=1.8954883$
$X_6=0.9326150$	$X_{14}=1.8655003$	$X_{22}=1.8948624$	$X_{30}=1.8954883$
$X_7=1.0602308$	$X_{15}=1.8765753$	$X_{23}=1.8951039$	

Para el caso de la aproximación $x_0=10\pi$ como vimos con el método de Newton que no era convergente ahora con el método de la secante tampoco lo será.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 30 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Resolución por el método de Newton modificado.

Podemos escribir $f(x)$ de la forma $f(x)=(x-p)^m q(x)$ para $x \neq p$ donde $\lim_{x \rightarrow p} q(x) \neq 0$. Veamos:

$$f(x) = (x-0)^2 \frac{0.5 + 0.25x^2 - x \sin x - 0.5 \cos 2x}{x^2} \text{ donde } \lim_{x \rightarrow 0} q(x) \neq 0$$

Por lo tanto puedo aplicar el método y quedará de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n - 2 \frac{0.5 + 0.25x_n^2 - x_n \sin x_n - 0.5 \cos 2x_n}{0.5x_n - \sin x_n - x_n \cos x_n + \sin 2x_n} = \frac{\cos 2x_n + x_n \sin 2x_n - x_n^2 \cos x_n - 1 + x_n \sin x_n}{0.5x_n - \sin x_n - x_n \cos x_n + \sin 2x_n}$$

Partiendo de una aproximación $x_0 = \pi/2$ tenemos las iteraciones de la tabla:

$x_0 = \pi/2$
$x_1 = 2$
$x_2 = 1.9009955$
$x_3 = 1.8955116$
$x_4 = 1.8954946$
$x_5 = 1.8954944$

Se puede observar la rapidez de su convergencia debido a que su velocidad es de orden dos.

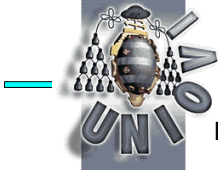
Partiendo de una aproximación $x_0 = 5\pi$ tenemos las iteraciones de la tabla:

$x_0 = 5\pi$	$x_4 = -0.2576460$
$x_1 = 10.4719755$	$x_5 = -0.0121675$
$x_2 = 4.3699623$	$x_6 = -0.0000011$
$x_3 = 0.6286105$	$x_7 = -0.0000023$

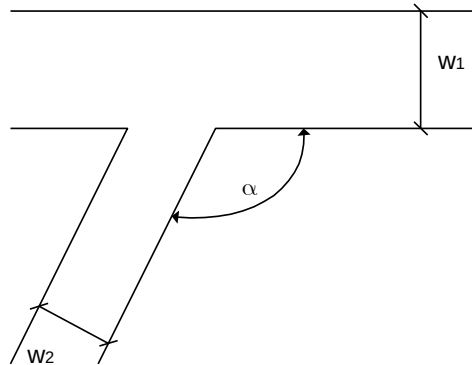
En este caso el método converge a la raíz 0.

Para el caso de la aproximación 10π el método diverge.

$x_0 = 10\pi$
$x_1 = 62.8318$
$x_2 = 125.66$
$x_3 = 251.32$
$x_4 = 502.21$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 31 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

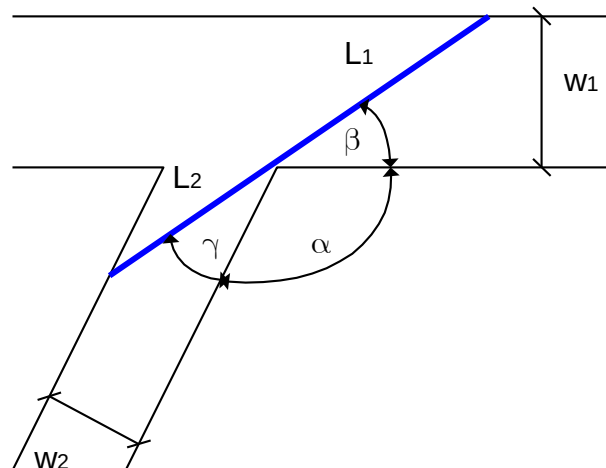
Ejercicio 10.- En una mina se intersectan dos galerías anchuras w_1 y w_2 respectivamente con un ángulo α .



- Plantear la ecuación para obtener la longitud que puede tener un raíl para pasar por el cruce dependiendo de las anchuras de las galerías y el ángulo que forman
- Plantear la ecuación para obtener la longitud máxima del raíl.
- Justifíquese la elección de un método para resolver la ecuación anterior y realícense 3 iteraciones, razonando el motivo para elegir los valores de partida. Se considera que $w_1=6\text{m}$, $w_2=4\text{m}$ y $\alpha=4\pi/6$.

Apartado (a) Planteamiento de la ecuación

Representamos el raíl para obtener las relaciones existentes



$$L = L_1 + L_2$$

$$L_1 = \frac{w_1}{\sin \beta}$$

$$L_2 = \frac{w_2}{\sin \gamma}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

de donde se obtiene que $L = \frac{w_1}{\sin \beta} + \frac{w_2}{\sin(\pi - \alpha - \beta)}$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 32 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (b) Planteamiento de la ecuación de la longitud máxima

Para calcular la longitud máxima, calculamos los extremos de la función

$$\frac{dL}{d\beta} = 0 \rightarrow \frac{w_1 \cos \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{w_2 \cos(\pi - \alpha - \beta)}{\sin^2(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{w_1 \cos \beta}{\sin^2 \beta} + \frac{w_2 \cos(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} = 0$$

Apartado (c) Elección del método

Sustituyendo los valores de los parámetros, se tiene

$$f(x) = \frac{6 \cos x}{\sin^2 x} + \frac{4 \cos(\frac{4}{6}\pi + x)}{\sin^2(\frac{4}{6}\pi + x)} = \frac{6 \cos x}{\sin^2 x} + \frac{4(\cos(\frac{4}{6}\pi)\cos(x) - \sin(\frac{4}{6}\pi)\sin(x))}{(\sin(\frac{4}{6}\pi)\cos(x) + \cos(\frac{4}{6}\pi)\sin(x))^2} =$$

$$= \frac{6 \cos x}{\sin^2 x} + \frac{4(2 \cos(x) - 2\sqrt{3} \sin(x))}{(\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x))^2}$$

La representación gráfica ha limitado los valores de x al intervalo $[0, \pi/2]$. Por otro lado, $f(x)$ es continua salvo en los puntos que anulan el denominador, esto es,

$$\begin{cases} \sin x = 0 & x = 0 \\ \sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = 0 \rightarrow \tan x = \sqrt{3} & x = \pi/3 \end{cases}$$

Para valores pequeños de x , $\cos(x) > \sin(x)$ y $f(x) > 0$; por el contrario, para valores de x próximos a $\pi/3$, $f(x) < 0$. Ello nos indica la conveniencia de utilizar métodos de intervalo.

Para aplicar métodos de punto fijo, no hay operaciones simples que permitan el despeje. Además, la comprobación de la convergencia del método obliga a acotar $f'(x)$, y no parece fácil. Por igual motivo, se descarta el cálculo mediante el método de Newton.

Se aplica “Regula Falsi” al intervalo $[\pi/10, 9\pi/30]$

Iter	A	F(a)	B	F(b)	X
1	0.3142	53.1184	0.9425	-358.6987	0.3952
2	0.3952	28.7238	0.9425	-358.6987	0.4358
3	0.4358	20.5863	0.9425	-358.6987	0.4633
4	0.4633	15.8968	0.9425	-358.6987	0.4836
5	0.4836	12.7199	0.9425	-358.6987	0.4993
6	0.4993	10.3874	0.9425	-358.6987	0.5118
7	0.5118	8.5924	0.9425	-358.6987	0.5219
8	0.5219	7.1694	0.9425	-358.6987	0.5301
9	0.5301	6.0184	0.9425	-358.6987	0.5369
10	0.5369	5.0744	0.9425	-358.6987	0.5426
11	0.5426	4.2924	0.9425	-358.6987	0.5473
12	0.5473	3.6399	0.9425	-358.6987	0.5513

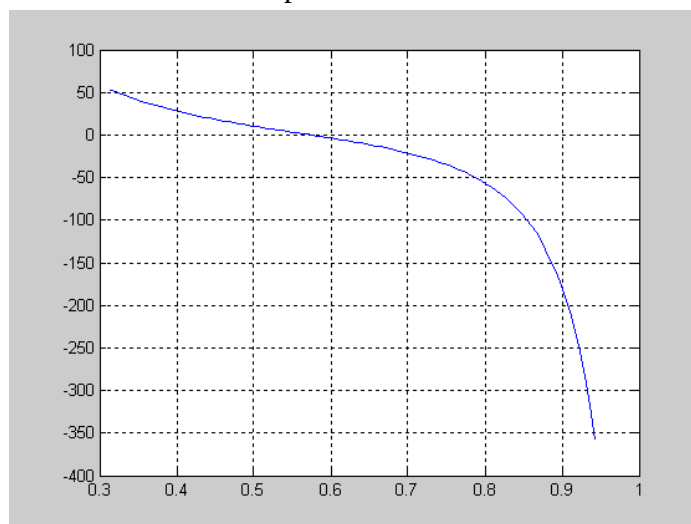
A la vista de los resultados, la función tiene aspecto de tener comportamiento asintótico en el extremo derecho, por lo que hubiera sido más adecuado utilizar “Regula Falsi” modificada.

Iter	A	F(a)	B	F(b)	X
1	0.3142	53.1184	0.9425	-358.6987	0.3952
2	0.3952	28.7238	0.9425	-358.6987	0.4358
3	0.4358	20.5863	0.9425	-179.3493	0.4880
4	0.4880	12.0673	0.9425	-89.6747	0.5419
5	0.5419	4.3919	0.9425	-44.8373	0.5776
6	0.5419	4.3919	0.5776	-0.5583	0.5736
7	0.5736	0.0056	0.5776	-0.5583	0.5736

Otra alternativa, más rápida, hubiera sido utilizar Müller. La aproximación parabólica de la función permite corregir el comportamiento asintótico. Además su velocidad es muy superior. En este caso se tiene

Iter	A	F(a)	m	F(m)	B	F(b)	X
1	0.3142	53.1184	0.6283	-8.0385	0.9425	-358.6987	0.6157
2	0.3142	53.1184	0.6157	-6.0860	0.6283	-8.0385	0.5780
3	0.3142	53.1184	0.5780	-0.6121	0.6157	-6.0860	0.5740
4	0.3142	53.1184	0.5740	-0.0531	0.5780	-0.6121	0.5736
5	0.3142	53.1184	0.5736	-0.0005	0.5740	-0.0531	0.5736

Representamos de todas formas la función para corroborar lo anterior.



 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 34 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 11.- Se desea resolver la ecuación $x^2 = \ln(1+x)^3$.

- Demostrar que admite dos raíces reales distintas.
- Analizar el método de Newton para obtener la raíz positiva de dicha ecuación. Seleccionar un valor inicial que asegure la convergencia, y efectuar dos iteraciones del método.
- Encontrar un método de punto fijo, diferente al de Newton, que asegure la convergencia hacia la raíz positiva.
- Comprobar si la siguiente función multivariable satisface las condiciones de punto fijo.

$$G(X) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2 + y^2 + 8}{10} \\ \frac{xy^2 + x + 8}{10} \end{pmatrix} \quad (0 \leq x, y \leq 1.5)$$

Apartado (a) Existencia de raíces

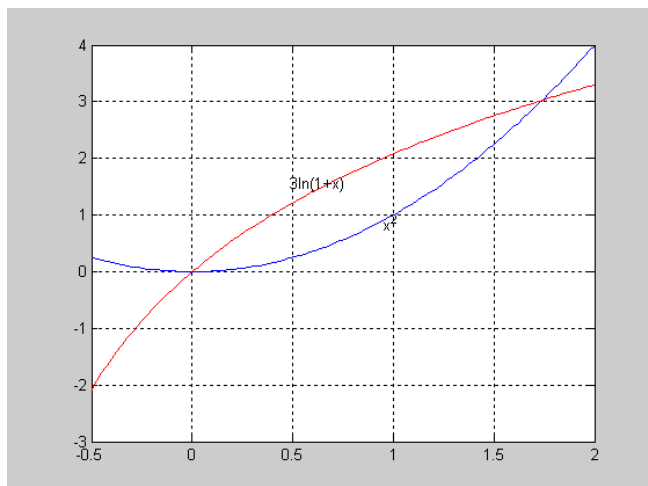
Comenzamos estudiando por separado ambas funciones, para posteriormente dibujarlas de forma aproximada.

$$y = x^2$$

La función está definida en toda la recta real y es siempre positiva. Es decreciente para valores negativos, creciente para valores positivos y nula en el origen. Convexa en todo el intervalo.

$$y = \ln(1+x)^3$$

La función está definida para valores de x superiores a -1 . La función es siempre creciente, tomando valores negativos para ordenadas negativas y anulándose en el origen. Cóncava en todo el intervalo de definición.



Representación de ambas funciones

Se aprecia que una de las raíces es el valor $x=0$, siendo el otro positivo y comprendido en $[1,2]$. Utilizamos el teorema de Bolzano para verificarlo:

Se define $f(x) = x^2 - \ln(1+x)^3$, que es continua y derivable en $(-1, \infty)$.

$$f(-0.5) = (-0.5)^2 - \ln(1-0.5)^3 = 2.3294 > 0$$

$$f(0.5) = (0.5)^2 - \ln(1+0.5)^3 = -0.9664 < 0$$

$$f(2) = (2)^2 - \ln(1+2)^3 = 0.7042 > 0$$

Por tanto hay al menos una raíz en $[-0.5, 0.5]$ y otra en $[0.5, 2]$.

Apartado (b) Convergencia del método de Newton

Analicemos las condiciones suficientes de convergencia del método de Newton en el intervalo $[1, 2]$.

- | | |
|---|--|
| i). $f(x) \in C^2[a, b]$ | ✓ $f(x) \in C^\infty[1, 2]$ |
| ii). $f(a) \cdot f(b) < 0$ | ✓ $f(1) = -1.0794$ y $f(2) = 0.7042$ |
| iii). $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ | ✓ $f'(x) = 2x - \frac{3}{1+x}$ que se anula en -1.8229 y 0.8229 , ambos fuera del intervalo en estudio. |
| iv). $\forall x \in [a, b]: f''(x) \geq 0 \vee f''(x) \leq 0$ | ✓ $f''(x) = 2 + \frac{3}{(1+x)^2} > 0 \forall x \in [1, 2]$ |
| v). $\max \left\{ \left \frac{f(a)}{f'(a)} \right , \left \frac{f(b)}{f'(b)} \right \right\} \leq b-a $ | $\max \left\{ \left \frac{-1.0794}{0.5} \right , \left \frac{0.7042}{3} \right \right\} > 2-1 $ No se cumple |

Sin embargo, la convergencia del método se podía asegurar, aunque no se cumpliera la condición v), cuando se tomaba como origen aquel extremo en que $f(x)$ y $f''(x)$ tienen el mismo signo. Se toma por tanto $x_0=2$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	2.000000000000000	0.70416313399567	3.000000000000000
1	1.76527895533478	0.06478523647547	2.44567640379214
2	1.73878925441808	0.00084023689916	2.38220397603465
3	1.73843654033163	0.00000014928760	2.38135746223789

La solución se obtiene en tres iteraciones.

Partiendo del extremo $x_0=1$ se observa que, al no verificar la condición v), la primera y segunda iteraciones se han salido del intervalo en estudio. Si bien finalmente la sucesión ha convergido a la solución, podría no haberlo hecho, o salirse del intervalo de definición.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	1.000000000000000	-1.07944154167984	0.500000000000000
1	3.15888308335967	5.70280268839673	5.59641864627486
2	2.13987377600689	1.14651197607723	3.32429513130685
3	1.79498503093734	0.13849100848341	2.51661905398256
4	1.73995445002195	0.00361759960453	2.38500018724542
5	1.73843763688966	0.00000276058570	2.38136009403345
6	1.73843647764217	0.000000000000161	2.38135731177998

Apartado (c) Método de punto fijo

existen muchas formas de obtener una función de punto fijo a partir de la ecuación inicial $x^2 = \ln(1+x)^3$. Despejando la variable de ambos miembros, tenemos las opciones:

$$g_1(x) = \sqrt{\ln(1+x)^3} \text{ y } g_2(x) = e^{x^2/3} - 1$$

Comprobamos las condiciones en ambas funciones tomando el mismo intervalo que en el caso anterior

- $g(x) \in C^1[a, b]$
 $g_1(x) \in C^1[1, 2]$ y $g_2(x) \in C^1[1, 2]$
- $\forall x \in [a, b]: g(x) \in [a, b]$
 $g_1(x)$ es monótona creciente, y acotada entre $g_1(1) = 1.4420$ y $g_1(2) = 1.8154$
 $g_2(x)$ es monótona creciente, y acotada entre $g_2(1) = 0.3956$ y $g_2(2) = 2.7937$

- $\forall x \in [a, b]: |g'(x)| \leq k < 1$
 $g_1'(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{3\log(1+x)}}$ es monótona decreciente y acotada entre $g_1'(1) = 0.5201$ y $g_1'(2) = 0.2754$

Aunque no es necesario, puesto que no cumple la condición anterior

$$g_2'(x) = \frac{2}{3} x e^{x^2/3} \text{ es monótona creciente y acotada entre } g_2'(1) = 0.9304 \text{ y } g_2'(2) = 5.0582$$

Por tanto sólo la función $g_1(x)$ cumple las condiciones del teorema de punto fijo.

Apartado (d) Método de punto fijo en sistemas no lineales

En este caso, las condiciones se modifican para convertirse en

- $G(x) \in C^1[D]$
 $g_1, \frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y} \in C^1(D)$ y $g_2, \frac{\partial g_2}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial y} \in C^1(D)$ tomando $D = \{(x, y): 0 \leq x, y \leq 1.5\}$
- $\forall (x, y) \in D: G(x, y) \in D$

$g_1(x, y)$ es monótona creciente respecto a ambas variables, y acotada entre $g_1(0, 0) = 0.8$ y $g_1(1.5, 1.5) = 1.25$. También $g_2(x, y)$ es monótona creciente respecto a ambas variables, y acotada entre $g_2(0, 0) = 0.8$ y $g_2(1.5, 1.5) = 1.2875$

- $\forall (x, y) \in D: \left| \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq \frac{k}{2}$ con $k < 1$

$g'_1(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{3\log(1+x)}}$ es monótona decreciente y acotada entre $g'_1(1) = 0.5201$ y

$$g'_1(2) = 0.2754$$

Se necesita verificar que todos los elementos de la matriz jacobiana cumplan la relación anterior. La jacobiana

$$J(X) = \begin{pmatrix} \frac{x}{5} & \frac{y}{5} \\ \frac{y^2+1}{10} & \frac{2xy}{10} \end{pmatrix}$$

está formada por funciones monótona creciente respecto a ambas variables, y se pueden acotar en los extremos del convexo.

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } J(1.5, 1.5) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3250 & 0.45 \end{pmatrix}$$

Por tanto la función indicada verifica las condiciones de punto fijo y converge a dicho punto para cualesquiera que sea la elección del punto inicial dentro del dominio.

Realizamos algunas iteraciones, comparando los resultados cuando se obtienen los nuevos valores con los antiguos (Jacobi) y cuando se actualizan con los datos ya calculados (Gauss-Seidel).

n	Jacobi	Gauss-Seidel
0	(0, 0)	(0,0)
1	(0.8, 0.8)	(0.8, 0.88)
2	(0.9280, 0.9312)	(0.9414, 0.9670)
3	(0.9728, 0.9733)	(0.9821, 0.9901)
4	(0.9894, 0.9894)	(0.9945, 0.9969)
5	(0.9958, 0.9958)	(0.9983, 0.9990)
6	(0.9983, 0.9983)	(0.9995, 0.9997)
7	(0.9993, 0.9993)	(0.9998, 0.9999)
8	(0.9997, 0.9997)	(0.9999, 1)
9	(0.9999, 0.9999)	(1, 1)

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 38 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 12.- La función $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ tiene tres raíces reales. Una reordenación de

la función para poder aplicar iteración de punto fijo es $x = \pm \sqrt{\frac{e^x}{3}}$.

- Mostrar que cuando se toma el signo negativo de la raíz, y comenzamos por cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^-$ el método converge a una raíz próxima a -0.5 . Demostrar que en realidad converge para cualquier valor real con el que se comience.
- Mostrar que cuando se toma el signo positivo de la raíz y se comienza por $x_0 = 0$ el método converge a una raíz próxima a 1.
- Mostrar que el método nunca converge a una raíz próxima a 4, incluso tomando valores muy próximos de partida. Encontrar otra fórmula del punto fijo que converja a esa raíz

Apartado (a) Convergencia a la raíz negativa

Comprobamos si $g(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{3}}$ verifica las condiciones de punto fijo.

- $g(x) \in C[a, b]$ La función es continua y está definida en toda la recta real.
- $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$ $g(x)$ monótona decreciente y acotada superiormente por 0.
(Existencia del punto fijo) $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow g(x) \leq 0 \Rightarrow \forall x \in I = (-\infty, 0]: g(I) \subset I.$

- $|g'(x)| \leq K < 1 \quad \forall x \in (a, b)$ $g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{e^x}$ monótona decreciente.
(Unicidad del punto fijo)

Toma sus valores máximos y mínimos en los extremos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = 0 \text{ y } g'(0) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{Así pues } |g'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1.$$

Hemos demostrado la existencia y unicidad de raíz en el intervalo $(-\infty, 0]$. Analicemos un intervalo menor que contenga el valor -0.5 , por ejemplo el $[-0.6, -0.4]$.

$$g(-0.6) = -0.4277 \in [-0.6, -0.4]$$

$$g(-0.4) = -0.4726 \in [-0.6, -0.4]$$

Existe raíz en este intervalo y como sólo existe una raíz queda demostrada la convergencia del método para cualquier valor negativo a una raíz próxima a -0.5 .

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 39 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Vamos a demostrar a demostrar ahora que se cumple para cualquier valor real positivo. Si definimos $x_1 = g(x_0)$ se tiene que $x_1 < 0$ para cualquier elección de x_0 . Así pues, a partir del valor x_1 estamos en el caso anteriormente estudiado.

Apartado (b) Convergencia a la raíz próxima a 1

$$g(x) = +\sqrt{\frac{e^x}{3}}$$

Procedemos de forma análoga al apartado anterior, pero con la raíz positiva:

$g(x) \in C[a, b]$	La función es continua y está definida en toda la recta real.
$g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$ (Existencia del punto fijo)	La función $g(x)$ es monótona creciente y acotada inferiormente por el valor nulo, es decir, $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow g(x) \geq 0$. Por tanto $g(I) \subset I$ donde $I = [0, \infty)$
$ g'(x) \leq K < 1 \quad \forall x \in (a, b)$ (Unicidad del punto fijo)	$g'(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2\sqrt{3}}$ es también monótona creciente, y no se puede acotar superiormente en todo el intervalo. Para que se cumpla esta condición es necesario que $\frac{\sqrt{e^x}}{2\sqrt{3}} < 1 \rightarrow x < \ln(12) \approx 2.48$. Analizamos pues el intervalo $[0, 2]$. Sus valores máximos y mínimos se alcanzan en los extremos, siendo respectivamente $g'(2) = \frac{\sqrt{e^2}}{2\sqrt{3}} < 0.785$ y $g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Así pues $ g'(x) \leq 0.785 < 1$. Además $g(2) = \frac{\sqrt{e^2}}{\sqrt{3}} < 1.57$ y $g(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ambos dentro del intervalo $[0, 2]$

Hemos demostrado la existencia y unicidad de raíz en dicho intervalo y la convergencia del método en el mismo.

Apartado (c) Convergencia a la raíz próxima a 4

De los apartados anteriores sabemos que:

Si tomamos $g(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{3}}$, el método converge a la raíz negativa, para cualquier elección de x_0 .

Si tomamos $g(x) = +\sqrt{\frac{e^x}{3}}$, el método converge a la raíz positiva próxima a 1, para cualquier elección de x_0 en el intervalo $[0, 2]$. Queda por estudiar el caso en que no pertenezca a dicho intervalo, pero empezamos estudiando en un entorno de la raíz.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 40 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Tomamos el intervalo $I=[3.9,4.1]$ y vamos a demostrar que no converge en ese intervalo, para lo que basta con que no se cumpla alguna de las hipótesis. Comenzamos viendo la condición sobre la derivada:

$$g'(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2\sqrt{3}} \rightarrow g'(4) = \frac{\sqrt{e^4}}{2\sqrt{3}} \approx 2.133$$

Así pues, para cualquier entorno que contenga al punto 4, la cota superior de la derivada va a ser mayor que uno. Asimismo, evaluando la función en ese punto se observa que el valor de la

función es superior al valor del punto ($g(4) = \frac{\sqrt{e^4}}{\sqrt{3}} \approx 4.266$), y al ser su derivada mayor que uno, crecerá más rápidamente que la recta, esto es, $g(x) > x \quad \forall x > 4$.

Para obtener otra fórmula que converja a 4 se puede tomar la siguiente reordenación:

$$f(x) = e^x - 3x^2 = 0 \quad e^x - 3x^2 = 0 \rightarrow e^x = 3x^2 \rightarrow x = \ln 3x^2 = \ln 3 + 2 \ln x = g(x).$$

Verificamos a continuación las condiciones del teorema:

$g(x) \in C[a, b]$	La función es continua y está definida en toda la recta real positiva
$g(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$ (Existencia del punto fijo)	La función $g(x)$ es monótona creciente. Para evitar los valores negativos, es necesario que $\ln 3x^2 > 0 \rightarrow x > \sqrt{1/3}$. Y para garantizar que la imagen del intervalo este incluida en el intervalo, es suficiente que $x > 1$. Por tanto $g(I) \subset I$ donde $I = [1, \infty)$.
$ g'(x) \leq K < 1 \quad \forall x \in (a, b)$ (Unicidad del punto fijo)	$g'(x) = \frac{2}{x}$ que es positiva y monótona decreciente en el intervalo I, por tanto, modificando el extremo izquierdo de forma que $x > 2$, tenemos garantizada la acotación. Se toma finalmente el intervalo $[2.5, \infty)$

Las únicas posibilidades para que puedan converger a cuatro, es que lo hagan en otro intervalo. Podemos comprobarlo:

$$g_2(x) > x \quad \forall x \in [4 - \delta, 4 + \delta] \Rightarrow g_2(x) \notin I \quad x \in I \quad \text{sino que es mayor y no podemos aplicar ninguna de las hipótesis}$$

vistas hasta ahora. $g_2(x) > x \quad \forall x \geq 4$. Definimos el error como:

$$|x_{n+1} - x_n| = |g_2(x_n) - x_n| \quad \text{y esto siempre será creciente. Si nos planteamos la sucesión } x_0, x_1, x_2, \dots, x_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Rightarrow$$

Esta sucesión diverge. Tendremos que encontrar otra técnica del punto fijo. Al principio despejamos x_2 pero también podemos hacerlo de otro modo:

$$e^x - 3x^2 = 0$$

$$e^x = 3x^2$$

$$x = \ln 3x^2$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 41 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Esta ecuación cumple todas las hipótesis en el intervalo $[4 - \delta, 4 + \delta]$. Podría no habérsenos ocurrido esta función pero sí:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Esta función seguro que en un entorno de la raíz converge, y además con convergencia cuadrática.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 42 de 42
	Tema	Ecuaciones No Lineales (Caso General)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 13.-