



Titulación: Grado en Ingeniería
Asignatura: Métodos Numéricos
Autor: César Menéndez

Última actualización: 31/01/2011

Preliminares

Planificación:

1 Teoría+0.5 Prácticas+1.5 Lab.Inf.

Materiales:

MATLAB

Conocimientos previos:

T^{mas}. básicos de Cálculo y Álgebra



Descripción

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Repaso de Análisis

➤ Matemática Finita

➤ Algoritmos

➤ Bibliografía

➤ Software

- Repaso de conceptos de análisis
 - Convergencia
 - Continuidad
 - Derivabilidad
- Se introducen definiciones y consecuencias del trabajo con matemática finita, esto es, las asociadas a las limitaciones de almacenamiento de los ordenadores
- Se define el concepto de algoritmo y estabilidad



Objetivos

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Repaso de Análisis

➤ Matemática Finita

➤ Algoritmos

➤ Bibliografía

➤ Software

- Recordar conceptos de análisis anteriores.
- Entender el concepto de algoritmo y la medida de su eficiencia.
- Comprender la importancia de las técnicas iterativas y su estabilidad.
- Apreciar el significado de la velocidad de convergencia.
- Aprender a utilizar los diagramas de flujo y pseudocódigos.
- Entender la diferencia entre error de truncamiento y de redondeo.
- Entender el concepto de cifras significativas.
- Conocer la diferencia entre exactitud y precisión.
- Apreciar la utilidad del error relativo y de las cotas de error.
- Aprender a relacionar el error relativo con las cifras significativas.
- Saber diferenciar el condicionamiento de un problema del condicionamiento de un algoritmo.



Convergencia

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Repaso de Análisis

➤ Matemática Finita

➤ Algoritmos

➤ Bibliografía

➤ Software

Convergencia

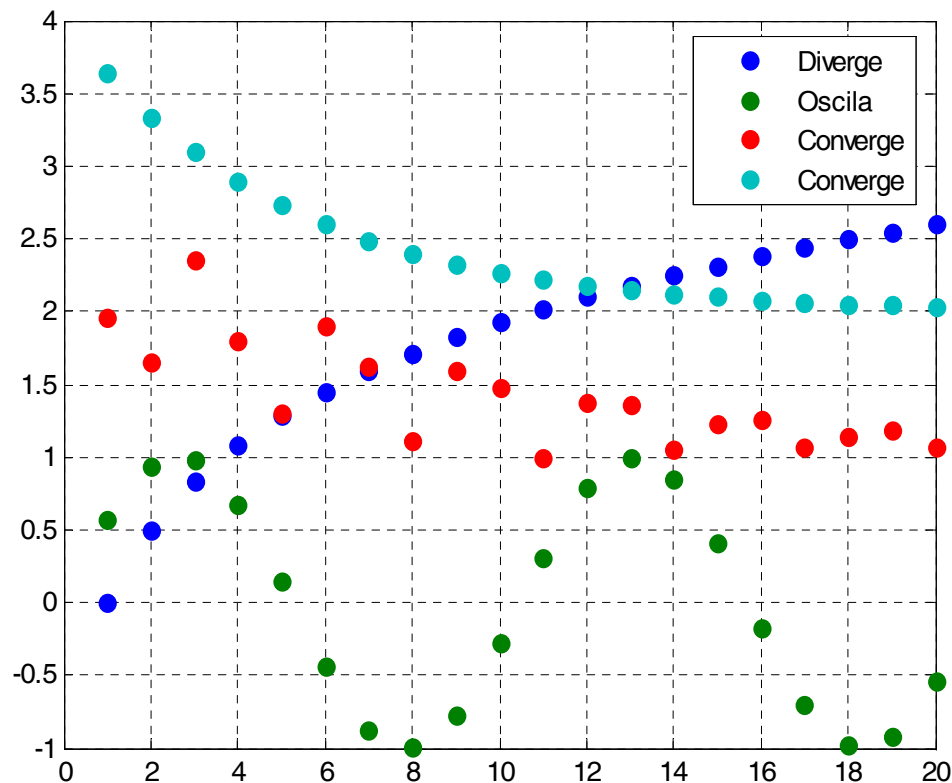
Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Definición: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) / n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión infinita de números reales o complejos. Se dice que la sucesión converge al número L cuando para cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo $N(\varepsilon)$ tal que cuando $n > N(\varepsilon)$ se tiene que $|L - x_n| < \varepsilon$.





Límites y continuidad

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Repaso de Análisis

➤ Matemática Finita

➤ Algoritmos

➤ Bibliografía

➤ Software

Convergencia

Continuidad

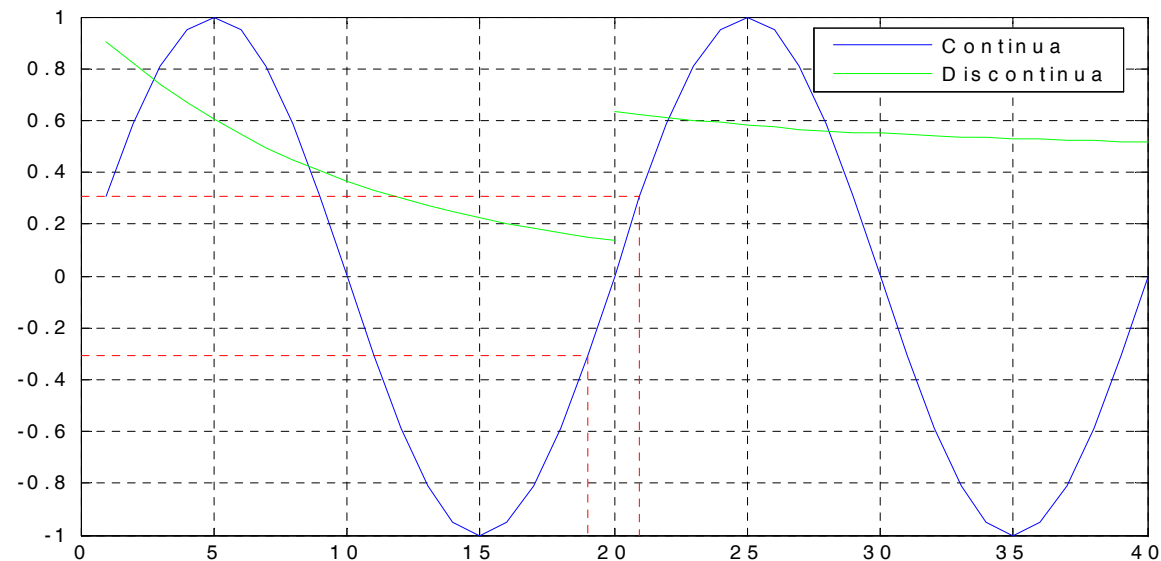
Diferenciabilidad

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Definición: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta / |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Sea $f(x)$ una función definida en un conjunto X de números reales. Se dice que $f(x)$ tiene como límite a L en el punto $a \in X$ cuando para cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe otro número real δ tal que siempre que $x \in X$ y $|x - a| < \delta$ se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Definición:

Sea $f(x)$ una función definida en un conjunto X de números reales. Se dice que f es continua en $a \in X$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

La función f es continua en X cuando lo es en cada punto de X .



Teoremas Continuidad

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Repaso de Análisis

➤ Matemática Finita

➤ Algoritmos

➤ Bibliografía

➤ Software

Convergencia
Continuidad
Diferenciabilidad
Tmas Integración
Tmas Desarrollos

Teorema del valor intermedio:

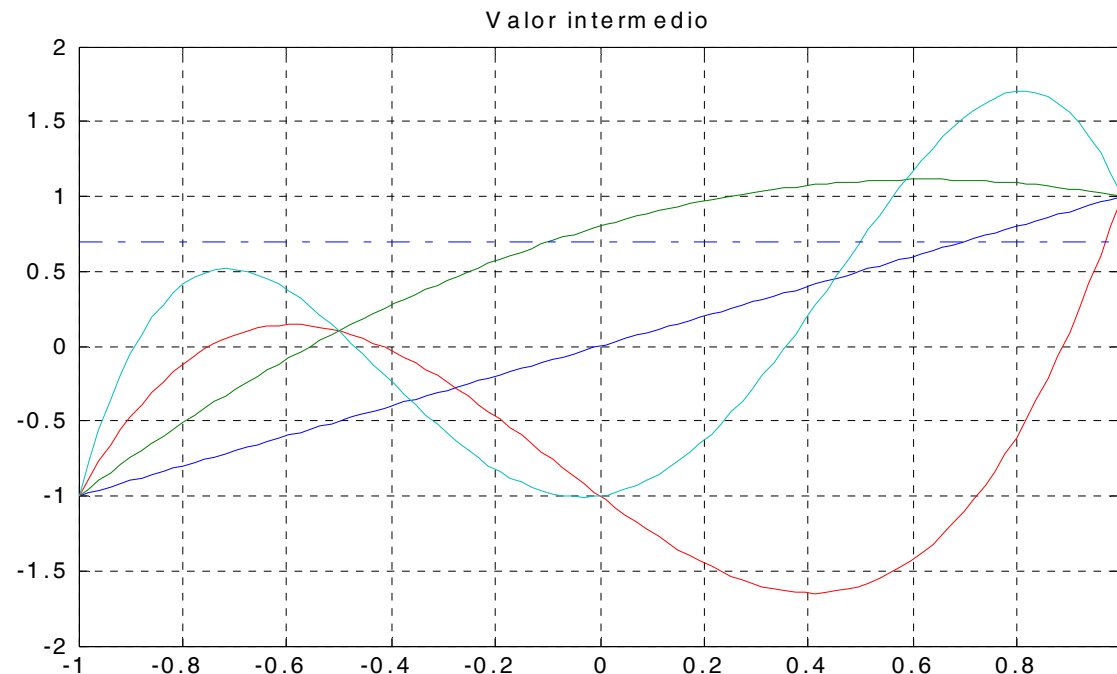
Sea $f(x) \in C([a, b])$ y K un valor cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto $c \in [a, b]$ en que la función toma el valor dado, $f(c) = K$.

Teorema de Bolzano

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ con valores de signos opuestos en los extremos, entonces existe un punto c en $[a, b]$ en que la función se anula.

Teorema del Valor Extremo

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, entonces alcanza su máximo M y su mínimo m en $[a, b]$, esto es, existen en el intervalo dos puntos c y d tales que $f(c) = M$ y $f(d) = m$ de forma que para todo valor $x \in [a, b]$ se tiene $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$.





Diferenciabilidad

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Convergencia
Continuidad
Diferenciabilidad
Tmas Integración
Tmas Desarrollos

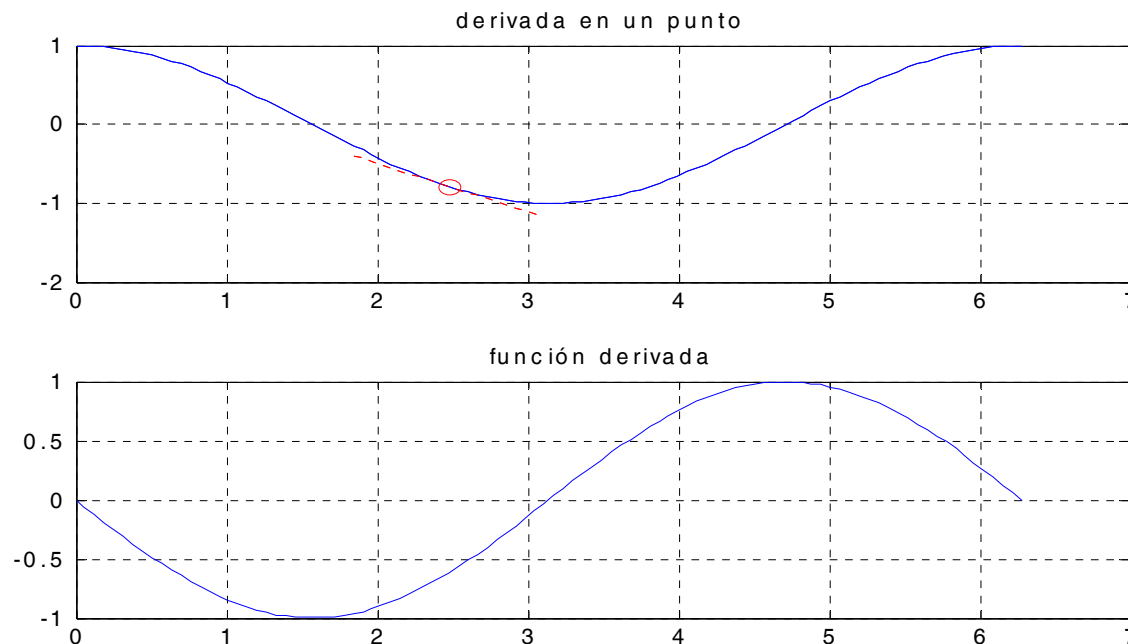
Definición:

Si f es una función definida en un intervalo X abierto que contiene al punto a , se dice que f es diferenciable en a si existe el valor

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La función f es diferenciable en X cuando lo es en cada punto de X .

Se denota por $C^n(X)$ al conjunto de funciones que tienen n derivadas continuas en X





Teoremas Continuidad y Diferenciabilidad

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Repaso de Análisis

➤ Matemática Finita

➤ Algoritmos

➤ Bibliografía

➤ Software

Convergencia
Continuidad
Diferenciabilidad
Tmas Integración
Tmas Desarrollos

Teorema del valor medio:

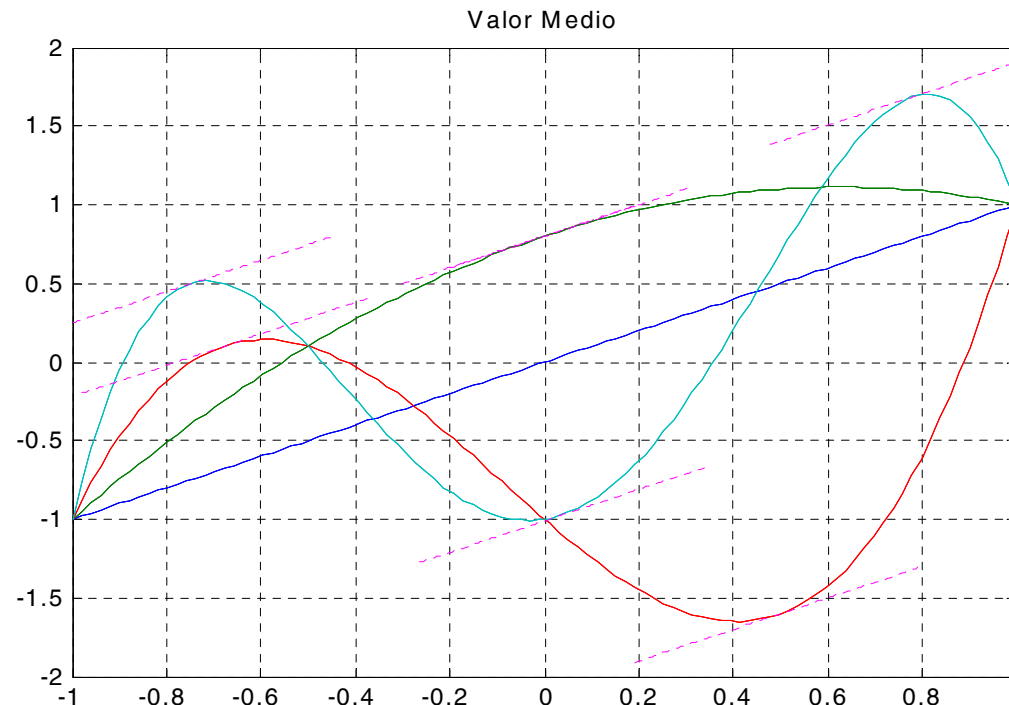
Sea $f(x) \in C[a, b]$ y $f(x) \in C^1(a, b)$ entonces existe un punto c en (a, b) cuya pendiente coincide con la de la recta que une los extremos, esto es

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema del valor medio: generalizado (Cauchy)

Sean $f(x), g(x) \in C[a, b]$ y $f(x), g(x) \in C^1(a, b)$ entonces existe al menos un punto c en (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$





Teoremas Diferenciabilidad

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Repaso de Análisis

➤ Matemática Finita

➤ Algoritmos

➤ Bibliografía

➤ Software

Convergencia
Continuidad
Diferenciabilidad
Tmas Integración
Tmas Desarrollos

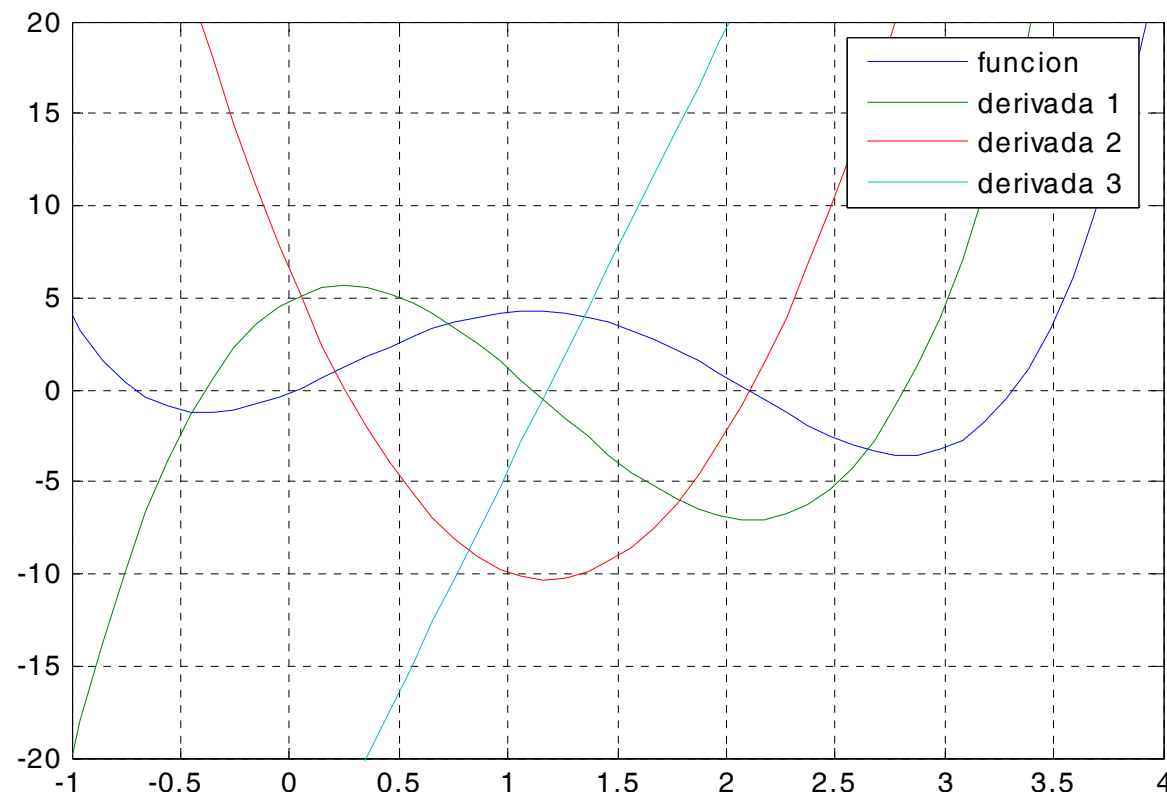
Teorema de Rolle

Sea $f(x) \in C[a, b]$ y $f(x) \in C^1(a, b)$ tal que se anula en sus extremos, entonces existe un punto c en (a, b) que anula su derivada. $f'(c) = 0$

Teorema de Rolle Generalizado

Sea $f(x) \in C^{n-1}[a, b]$ y $f(x) \in C^n(a, b)$ tal que se anula en $(n+1)$ puntos distintos, entonces existe un punto c en (a, b) que anula su derivada n -ésima $f^{(n)}(c) = 0$

Rolle Generalizado





Teoremas Integrabilidad

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Repaso de Análisis

➤ Matemática Finita

➤ Algoritmos

➤ Bibliografía

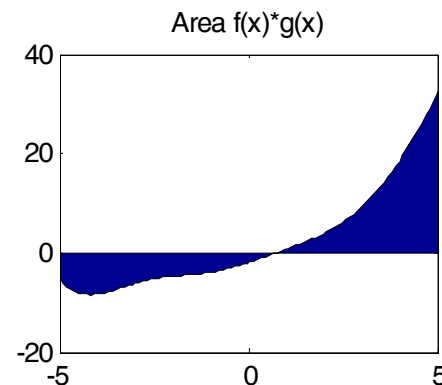
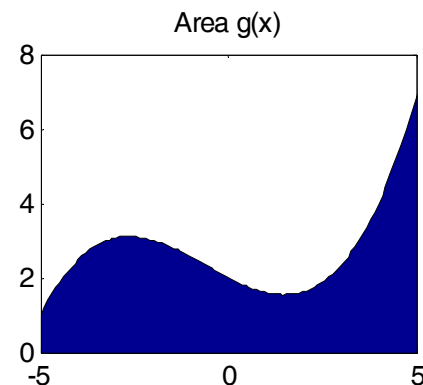
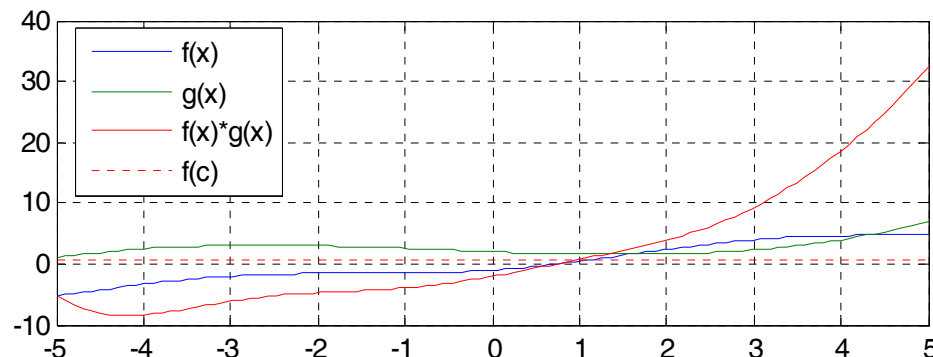
➤ Software

Convergencia
Continuidad
Diferenciabilidad
Tmas Integración
Tmas Desarrollos

Teorema del valor medio para integrales

Sean $f(x), g(x) \in C[a, b]$ donde $g(x)$ es integrable y no cambia de signo en $[a, b]$, entonces existe un punto c en (a, b) tal que

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$



$$f(x) = x - \cos(x)$$

$$g(x) = \frac{2}{45}x^3 + \frac{7}{90}x^2 - \frac{47}{90}x + 2$$

$$\int_{-5}^5 f(x) \cdot g(x) dx = 18.8623$$

$$\int_{-5}^5 g(x) dx = 26.4815$$

$$\frac{18.8623}{26.4815} = 0.7123 = f(1.1347)$$



Teoremas de desarrollo en serie

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Convergencia
Continuidad
Diferenciabilidad
Tmas Integración
Tmas Desarrollos

Teorema del Taylor para funciones de una variable

Sea $f(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$ y un punto $c \in (a, b)$, entonces para cualquier punto $x \in (a, b)$ existe un valor $\xi_x \in (c, x)$ tal que $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ donde

$$P_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Teorema del Taylor para funciones de varias

Sea $f(x, y) \in C^{(n+1)}D=[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ y un punto $(c, d) \in D$, entonces para cualquier punto $(x, y) \in D$ existe un par valor $(\xi_x, \xi_y) \in [c, x] \times [d, y]$ tales que $f(x, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y)$ donde

$$P_n(x, y) = f(c, d) + \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(c, d) \frac{(x-c)}{1!} + \frac{\partial f}{\partial y}(c, d) \frac{(y-d)}{1!} \right\} +$$
$$+ \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c, d) \frac{(x-c)^2}{2!} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c, d) \frac{(x-c)(y-d)}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c, d) \frac{(y-d)^2}{2!} \right\} + \dots$$

$$+ \left\{ (x-c) \frac{\partial}{\partial x} + (y-d) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^n f(c, d)$$

$$R_n(x, y) = \left\{ (x-c) \frac{\partial}{\partial x} + (y-d) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^{n+1} f(\xi_x, \xi_y)$$



Ejemplo: desarrollo $\cos(x)$ en $x=2$

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Repaso de Análisis

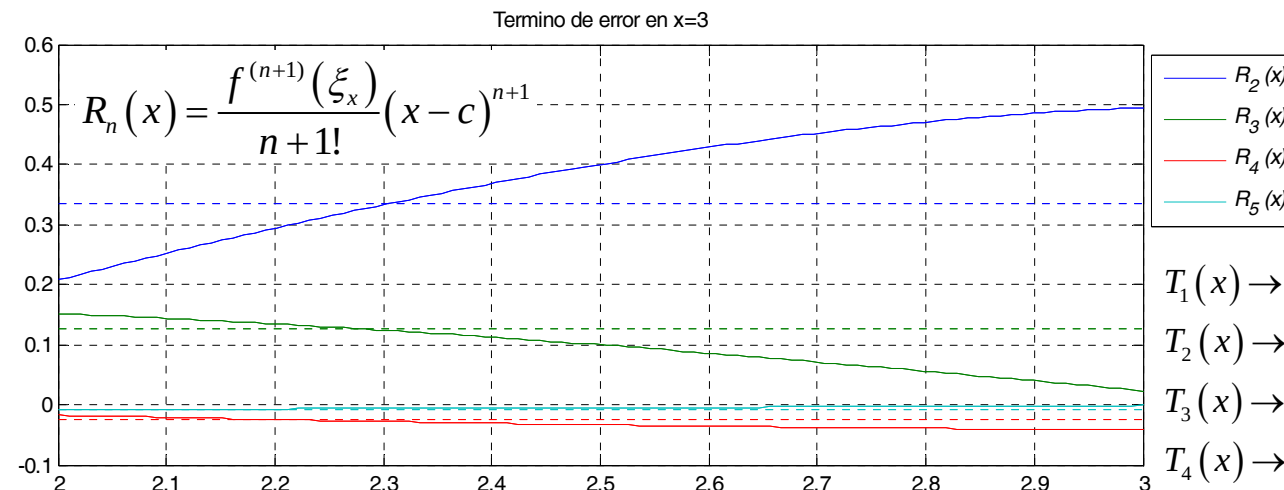
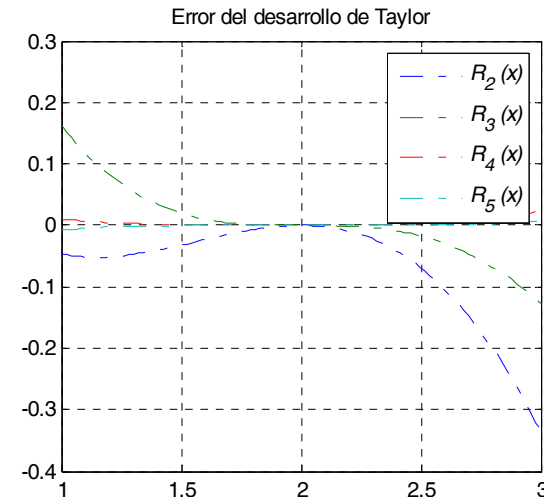
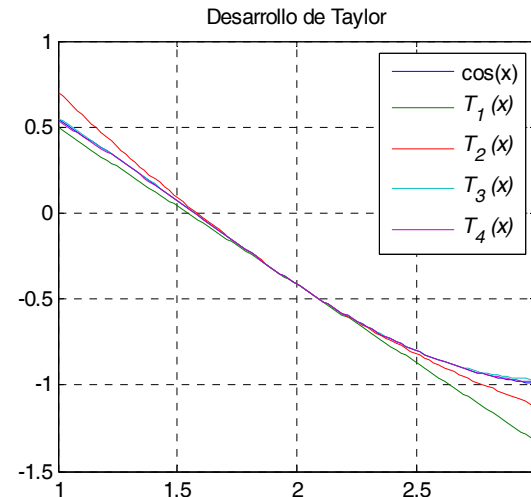
➤ Matemática Finita

➤ Algoritmos

➤ Bibliografía

➤ Software

Convergencia
Continuidad
Diferenciabilidad
Tmas Integración
Tmas Desarrollos





Códigos numéricos y representación

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Representación

Definiciones

Errores

- Notación posicional: $777 = 7 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 7$
- Códigos enteros y reales (base 10)
 - $123.45 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$
 - Forma normalizada de un número real
 - $X = m \times b^e$ con $b^0 \leq m < b^{-1}$
 - $123.45 = 1.2345 \times 10^2 = 12345 \times 10^{-2} = \mathbf{0.12345 \times 10^3}$
- Hay errores en la representación de los valores en el ordenador debido a la limitación de almacenamiento
 - Truncamiento: Se almacenan N decimales y se pierde el resto (obsoleto)
 - Redondeo: Se suma media unidad al decimal N y se trunca (defecto)

4 dígitos	Truncamiento	Redondeo
1'414 21256...	$0'1414 \times 10^1$	$0'1414 \times 10^1$
2'645 751311...	$0'2645 \times 10^1$	$0'2646 \times 10^1$



Representación Decimal (I)

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Representación

Definiciones

Errores

- Punto fijo:
 - Los dígitos de almacenamiento se reparten para la parte entera y la parte decimal
 - Ejemplo: 8 dígitos con 3 decimales
 - $fl(123.456)=00123456$
 - $fl(12345.6)=12345600$
 - $fl(1.23456)=00001235$
- Punto flotante:
 - Se representa de forma normalizada, repartiéndose los dígitos para la mantisa y el exponente
 - Ejemplo: 8 dígitos con 2 de exponente
 - $fl(123.456)=03123456 \quad 0.123456 \times 10^3$
 - $fl(12345.6)=05123456 \quad 0.123456 \times 10^5$
 - $fl(1.23456)=01123456 \quad 0.123456 \times 10^1$
 - Normalmente se hace un cambio de escala en el exponente para incluir exponentes negativos, convirtiendo el $[0,99]$ en $[-49,50]$ (restando $99/2$)
- Representación binaria: IEEE 754 (cero, NaN e Inf)
http://es.wikipedia.org/wiki/IEEE_coma_flotante



Dígitos, rango y precisión

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Representación
Definiciones
Errores

- Se denomina **rango** de una representación al intervalo de valores que puede representar, esto es, desde el mínimo hasta el máximo.
- Un número x aproxima a r con n **dígitos significativos (cifras)** si n es el natural más grande tal que

$$\left| \frac{x - r}{r} \right| < 5 \cdot 10^{-n}$$

- Se denomina **precisión** de una representación a la exactitud que se obtendría si todas las cifras calculadas fueran significativas
- Ejemplo: al calcular $\sqrt{2}$ (1'414213562...) se obtiene 1'41421**256**
 - Cifras significativas: 6
 - Precisión: 9

$$\frac{\left\| \sqrt{2} - 1'41421256 \right\|}{\sqrt{2}} = 7' \dots \times 10^{-7}$$

8 dígitos	Punto fijo (3 decimales)	Punto flotante (6 decimales)
Rango	[0.001,99999.999]	[0.1×10 ⁻⁴⁴ ,0.999999×10 ⁴⁵]
Cifras signif.	1-8	6
Precisión	1-8	6



Exactitud y Errores

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Representación
Definiciones
Errores

- Se denomina **exactitud** de un proceso, método, fórmula o cálculo a la bondad con que el resultado obtenido representa el valor real que queríamos calcular.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left\{ f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right\} \text{ exacta para } P_2(x)$$

- El **error absoluto** E_x es la diferencia entre el valor real y el valor aproximado, tomada en valor absoluto.
- El **error relativo** e_x es el cociente entre el error absoluto y el valor real, tomada habitualmente en valor absoluto

$$E_x = |x - \tilde{x}| \quad e_x = \left| \frac{(x - \tilde{x})}{x} \right|$$

- Se denomina **unidad de redondeo** de un ordenador al menor número positivo en punto flotante δ tal que $\text{float}(1+\delta) > 1$
- Ejemplo: trabajando con 4 cifras significativas $\text{fl}(1/3) = 0.3333$
 - Errores absolutos y relativos
$$E_x = \left| \frac{1}{3} - 0.3333 \right| = \frac{1}{3} 10^{-4} \quad e_x = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| = \frac{\frac{1}{3} 10^{-4}}{\frac{1}{3}} = 10^{-4}$$
 - Unidad de redondeo 0.0005
 - $\text{float}(1.0005) = 1.001$ $\text{float}(1.0004) = 1.000$



Error de representación

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Representación
Definiciones
Errores

El error relativo de representación con k dígitos de un valor no nulo x en base b viene acotado $\underline{b^{1-k}}$ o $\underline{\frac{1}{2}b^{1-k}}$ para por las aproximaciones por truncamiento o por redondeo respectivamente

	Valor	Aprox.	Error	Relativo
Tr.	1'414212...	$0'1414 \times 10^1$	$0'212... \times 10^{-3}$	$0'151... \times 10^{-3}$
Tr.	2'645751...	$0'2645 \times 10^1$	$0'751... \times 10^{-3}$	$0'283... \times 10^{-3}$
Rd.	1'414212...	$0'1414 \times 10^1$	$0'212... \times 10^{-3}$	$0'151... \times 10^{-3}$
Rd.	2'645751...	$0'2646 \times 10^1$	$-0'246... \times 10^{-3}$	$-0'939... \times 10^{-4}$



- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Representación
Definiciones
Errores

Error de operaciones (I)

- Operaciones elementales (+, −, ×, ÷)

$$\tilde{x} = fl(x) = x - \alpha = x(1 - e_x) \quad \tilde{y} = fl(y) = y - \beta = y(1 - e_y)$$

$$x \circ y - fl(x \circ y) = x \circ y - \tilde{x} \bullet \tilde{y} = (x \circ y - \tilde{x} \circ \tilde{y}) + (\tilde{x} \circ \tilde{y} - \tilde{x} \bullet \tilde{y})$$

= Error Propagado + Error de representación

Operación	Suma	Resta	Multip.	División
Absoluto	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$	$y\alpha + x\beta - \alpha\beta$	$\frac{\alpha - \beta \cdot x/y}{y - \beta}$
Relativo	$\frac{x}{x+y}e_x + \frac{y}{x+y}e_y$	$\frac{x}{x-y}e_x - \frac{y}{x-y}e_y$	$e_x + e_y + e_x e_y$	$\frac{e_x - e_y}{1 - e_y}$

- Funciones elementales

$$y = f(\vec{x}) = f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$fl(y) = y + E_y = fl\left(f(x_0 + E_0, x_1 + E_1, x_2 + E_2, \dots, x_n + E_n)\right)$$

$$|E_y| \leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} E_k \right| \quad |e_y| \leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{x_k}{y} e_k \right|$$



Error de operaciones (II)

➤ Motivación

➤ Objetivos

➤ Temario

➤ Repaso de Análisis

➤ Matemática Finita

➤ Algoritmos

➤ Bibliografía

➤ Software

Representación

Definiciones

Errores

● Ejemplo de resta

$$\begin{array}{lll} x = \pi & y = \frac{22}{7} & x - y = -1.2645... \times 10^{-3} \\ fl(x) = 3.1416 & fl(y) = 3.1429 & fl(x - y) = -0.0013 \\ E_x \leq 7.35 \times 10^{-6} & E_y \leq 4.29 \times 10^{-5} & E_{x-y} \leq 3.55 \times 10^{-5} \\ e_x \leq 2.34 \times 10^{-6} & e_y \leq 1.36 \times 10^{-5} & e_{x-y} \leq 2.8 \times 10^{-2} \end{array}$$

● Ejemplo de cociente

$$\begin{array}{lll} x = \frac{22}{7} & y = \frac{1}{3000} & x \div y = 9.4286 \times 10^3 \\ fl(x) = 3.1429 & fl(y) = 3.3333 \times 10^{-4} & fl(x \div y) = 9.4300 \times 10^3 \\ E_x \leq 1.4286 \times 10^{-4} & E_y \leq 3.3333 \times 10^{-8} & E_{x-y} \leq 1.4286 \\ e_x \leq 4.5455 \times 10^{-5} & e_y \leq 1.0 \times 10^{-4} & e_{x-y} \leq 1.5152 \times 10^{-4} \end{array}$$

● Ejemplo de función

$$y = \log_a(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x \ln(a)} \\ \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{-y}{a \ln(a)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_y \leq \left| \frac{1}{x \ln(a)} \right| E_x + \left| \frac{-y}{a \ln(a)} \right| E_a \\ e_y \leq \frac{e_x}{|\ln x|} + \frac{e_a}{|\ln a|} \end{cases}$$



Fuentes de error en el modelado matemático

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Representación
Definiciones
Errores

- Problema físico: trayectoria de un proyectil

$$m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \underbrace{-mgk}_{\text{GRAVEDAD}} - \underbrace{b \frac{dr(t)}{dt}}_{\text{ROZAMIENTO}}$$

- Modelado matemático con hipótesis y simplificaciones
 - Efectos atmosféricos (lluvia, contaminación, vientos)
 - Se desprecia el giro terrestre (fuerzas de Coriolis)
 - Se considera que el rozamiento sólo depende del aire.
- Errores debido al desconocimiento de los datos físicos (inexactitudes de las medidas o imposibilidad).
- Errores del Método de Resolución:
 - Algoritmo de predicción-corrección para ecuaciones diferenciales con el error provocado al aproximar la derivada por la secante
- Errores de Implementación en el ordenador
 - Equivocaciones (errores de programación, cambios inadvertidos de signos, etc.)
 - Errores debidos a la aritmética del ordenador (errores de representación, etc.).



Algoritmos

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Introducción
Condicionamiento
Estabilidad

- **Algoritmo:** Procedimiento que describe sin ninguna ambigüedad una sucesión de pasos a realizar en un orden específico
- **Clasificación**
 - No numéricos (p.e. ordenación alfabética de listas)
 - Numéricos (cálculo del m.c.d., algoritmo de Euclides)
 - Finitos (Álgebra)
 - Infinitos (Análisis)
- **Algoritmo Numérico:** Conjunto de instrucciones para efectuar operaciones matemáticas con números que conducen al valor o valores solución de un problema dado.
- **Algoritmos Infinitos:** sucesión infinita pero numerable de operaciones



Algoritmos Infinitos: ejemplo

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Introducción

Condicionamiento
Estabilidad

• Caracterización de los algoritmos Infinitos

- Condiciones de convergencia
- Velocidad de convergencia
- Acotación del error cometido tras un numero finito de pasos
- Eficiencia (nº de operaciones, uso de memoria, etc.)

• Ejemplo: cálculo de $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{kx}$

- Sucesión de aproximaciones a la solución $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$
- Condiciones de convergencia $|x| < 1$
- ¿Qué sucesión es más rápida? $b_n = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{nx}$

- ¿Cuál es el error del término n-simo?

$$E_n = |e^x - a_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e$$

- ¿Qué algoritmo de cálculo es más eficiente?

$$a_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1$$

$$(I) \begin{cases} a_n = 1 \\ a_n = a_n + \frac{x^k}{k!} \quad k=1, \dots, n \end{cases} \quad (II) \begin{cases} a_n = \frac{x}{n} \\ a_n = (a_n + 1) \frac{x}{k} \quad k=n-1, \dots, 1 \\ a_n = a_n + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (I) \sum_{k=1}^n \{+1, \times k-1, \div 1, \wedge 1\} \\ (II) \sum_{k=1}^n \{+1, \times 1, \div 1, \wedge 0\} \end{cases}$$



Condicionamiento

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Introducción

Condicionamiento

Estabilidad

- El condicionamiento de un problema mide la sensibilidad de la solución a cambios pequeños en los parámetros del problema.
 - Problema bien condicionado: pequeñas variaciones de los datos dan lugar a pequeñas variaciones en los resultados.
 - Resolución numérica requiere problemas bien condicionados, ya que la representación de los datos y la aritmética del ordenador perturban los datos.
- Ejemplo: Obtener las raíces del siguiente polinomio al añadirle 1 milésima al término de grado 9

$$P_{10}(x) = \prod_{k=1}^{10} (x - k) = \sum_{k=0}^{10} a_k x^k = x^{10} - 55x^9 + 1320x^8 + \dots + 3628800$$

$$\tilde{P}_{10}(x) = P_{10}(x) - 0.001x^9 = x^{10} - 55.001x^9 + 1320x^8 + \dots + 3628800$$

Raíces: $\{1., 1.9999, 3.0019, 3.9476, 5.1376 \pm 0.59304i, 7.2317 \pm 1.5827i, 10.155 \pm 1.14887i\}$

$$E_p \approx \frac{\partial P}{\partial a_9} E_{a_9} = x^9 \cdot 10^{-3} \Rightarrow e_p \approx \frac{\partial P}{\partial a_9} \frac{E_{a_9}}{P} = \frac{x^9}{P_{10}(x)} 10^{-3}$$



Estabilidad numérica

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Introducción
Condicionamiento
Estabilidad

- Un algoritmo es estable cuando un error inicial se propaga decreciendo o creciendo linealmente con las iteraciones. Es inestable cuando el crecimiento es exponencial.

$$E_0 \rightarrow \begin{cases} \text{Estable} & \begin{cases} E_n = C \cdot E_0 \\ C < 1 \end{cases} \\ \text{Inestable} & E_n = C^n \cdot E_0 \end{cases}$$

- Problema mal condicionado: inestable para cualquier algoritmo.
- Problema bien condicionado: estable o inestable dependiendo del algoritmo
- Ejemplo: calcular $\{p_n\} = \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}$ usando aritmética con 5 cifras

– Nota: $\frac{1}{3} = 0,33333 + \varepsilon$ con $\varepsilon = \frac{1}{3}10^{-5}$

– Algoritmo I: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} \frac{1}{3} \end{cases}$

$$E_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n - 0,33333^n = (0,33333 + \varepsilon)^n - 0,33333^n \approx n(0,33333)^{n-1} \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0 \Rightarrow \text{Estable}$$



Estabilidad numérica

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Introducción
Condicionamiento
Estabilidad

– Algoritmo II:
$$\begin{cases} b_0 = 1; & b_1 = \frac{1}{3} \\ b_n = \left(\frac{10}{3}\right)b_{n-1} - b_{n-2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

- Autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{3} \quad \lambda_2 = 3$
- Solución $b_n = \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^n + \beta 3^n$

$$\begin{cases} b_0 = 1 = \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \beta (3)^0 \\ b_1 = 0,33333 = \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \beta (3)^1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + 0,125 \times 10^{-5} \\ \beta = -0,125 \times 10^{-5} \end{cases}$$

$$E_n = 0,125 \times 10^{-5} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3^n \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \infty \Rightarrow \text{Inestable}$$



Bibliografía Base Comentada

- **Motivación**
- **Objetivos**
- **Temario**
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- **Bibliografía**
- **Software**

- Burden, R. & Faires, J.D. "Análisis Numérico".
Comienza con una revisión de conceptos y teoremas del Álgebra y el Análisis. A continuación estudia la representación numérica, sobre todo en punto flotante, desarrollando varios ejemplos clarificadores en binario. Asimismo hace un estudio del error que desemboca en el concepto de estabilidad de un algoritmo. Finalmente oferta interesantes ejercicios para verificar la comprensión alcanzada.
- Chapra, S.C. & Canale, R.P. "Métodos Numéricos para Ingenieros"
Realiza, de forma simple y sucinta, el desarrollo de programas y su aplicación en el Análisis Numérico. En este entorno, tras mostrar con ejemplos el uso de los diagramas de flujo. En el capítulo tercero se dedica al estudio del error, matizando sus diferentes fuentes.
- Conte, S. D. y Boor, C. "Análisis Numérico".
- Curtis, G. & Wheatley, J. "Análisis Numérico con Aplicaciones"
- J. M. Sanz-Serna. "Diez Lecciones de Cálculo Numérico".
- Eldé, L.; Wittmeyer-Koch, L. & Nielsen, H.B. "Introduction to Numerical Computation"



Bibliografía Comentada

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

- [Minguet, J.M. & Fernández, J.C. (1976)] Expondremos las lecciones centrales de este tema con el enfoque dado por este libro en los Temas I y II de la Unidad Didáctica 4.
- [Atkinson (1989)] Tras un repaso de teoremas matemáticos básicos, dedica el resto del primer capítulo a la representación numérica, las fuentes y propagación de errores y la estabilidad. Particulariza diferentes conceptos (rango, cifras significativas, precisión) para diferentes computadores, considerando el caso de doble precisión. También hace un breve estudio estadístico de la propagación del error.
- [Brezinski (1988)] Desarrolla en detalle el tema de representación de los números en el ordenador, operaciones con números de máquina y la propagación de errores en el caso de operaciones elementales como la suma y el producto de n números. Da nociones generales sobre el concepto de algoritmo y conciencia al lector de la diferencia que existe entre el comportamiento teórico de un algoritmo, y el comportamiento en la máquina.
- [Henrici (1972)] En el capítulo 16 realiza un completo estudio estadístico de la propagación de errores cuando se emplea aritmética de punto fijo.
- [Kincaid, D. & Cheney, W. (1991)] Sirve para aclarar el almacenamiento binario de los números en el ordenador, relacionando los bits empleados para la mantisa y el exponente con el rango, la precisión, etcétera.
- [Stoer, J. & Bulirsch, R. (1980)] Desarrolla muy bien el tema de la representación de los números en el ordenador así como la propagación de errores en algoritmos simples. Para resolver casos más realistas, inicia al lector en el tema de la aritmética de intervalos, así como en la estimación estadística de los errores de redondeo.
- [Atkinson, L.V. & Harley, P.J. (1987)] En el capítulo segundo define diáfano el concepto de algoritmo mal condicionado y pone ejemplos.
- [Cohen, A.M. y otros (1977)] Muestra varios ejemplos que matizan la pérdida de precisión en los resultados al efectuar operaciones en punto flotante. Aborda el estudio del error empleando el análisis del intervalo.
- [Demidovich, B.P & Maron, I.A. (1988)] Dedicar un capítulo al estudio de los números aproximados, con un interesante estudio de la pérdida de cifras significativas con las diferentes operaciones elementales.
- [Forsythe y otros (1977)] Muestra también buenos ejemplos de problemas mal condicionados analizando sobre ellos el efecto de los errores.
- [Rice (1983)] Muestra ejemplos muy bien escogidos del efecto del error de truncamiento y su propagación en diversos problemas del análisis numérico.



Matlab vs Octave

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Operación	Matlab	Octave
Formatea la salida de resultados numéricos en pantalla: short (E,G), long (E,G), rat, bank, hex, ...	format	=
Muestra resultados simbólicos con un número definido de cifras decimales	vpa	=
Convierte un valor de decimal a binario y viceversa	dec2bin bin2dec	=
Idem con hexadecimal	hex2dec dec2hex	=
Idem con cualquier base	base2dec dec2base	=
Unidad de redondeo del ordenador	eps	=
Valores máximos y mínimos del ordenador	realmax realmin	=
Redondea al entero más próximo	round	=
Redondea al entero superior más próximo	ceil	=
Redondea al entero inferior más próximo	floor	=
Devuelve la parte entera	fix	=



Anexos

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

- Demostraciones y desarrollos



Desmostración 1

- Motivación
- Objetivos
- Temario
 - Repaso de Análisis
 - Matemática Finita
 - Algoritmos
- Bibliografía
- Software

Introducción
Condicionamiento
Estabilidad