Tema 8: Estimación por intervalos

TRANSPORTE El gerente de cierta empresa de transporte está interesado en estudiar los ingresos diarios, variable distribuida normalmente. En una muestra de 8 días se han obtenido unos ingresos medios de 525 euros con desviación típica 116,5.

a) Obtener un intervalo de confianza al 95% para el ingreso diario esperado.

b) Por estudios previos se conoce que la desviación típica de los ingresos es de 150 euros:

b1) ¿Cómo se vería afectado el intervalo del apartado a)?

b2) Determinar el tamaño de muestra necesario para reducir a la tercera parte la amplitud del intervalo obtenido en b1), manteniendo el mismo nivel de confianza.

SOLUCIÓN

a) Obtener un intervalo de confianza al 95% para el ingreso diario esperado.

Sea X, ingresos diarios de la empresa (en euros), una v.a. distribuida normalmente y cuya varianza poblacional es desconocida. La discrepancia para la media muestral vendrá dada por:

$$d_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \approx t_{n-1}$$

de donde se deduce la expresión del intervalo aleatorio para μ:

$$\left(\bar{X} - k\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + k\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

Por otro lado, dado que la discrepancia sigue una distribución t de Student con 7 grados de libertad, el valor de k será obtenido como:

$$P(|t_7| \le k) = 0{,}95 \Leftrightarrow P(|t_7| > k) = 0{,}05 \qquad \Rightarrow \qquad k = 2{,}3646$$

El intervalo estimado para el ingreso esperado será (427,51; 622,49):

b) Por estudios previos se conoce que la desviación típica de los ingresos es de 150 euros:

b1) ¿Cómo se vería afectado el intervalo del apartado a)?

Si la dispersión poblacional es conocida, la discrepancia para la media muestral vendrá dada por:

$$d_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

de donde puede deducirse el intervalo de confianza:

$$\left(\overline{X}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Ahora el valor de k se obtendrá como:

$$P\left(\left|N(0,1)\right|\leq k\right)=0{,}95 \qquad \Rightarrow \qquad k=1{,}96$$

El IC aleatorio al 95% será:

$$\left(\overline{X}-1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Teniendo en cuenta que σ = 150 y los datos muestrales (n=8, $\overline{x}=525$), el intervalo estimado es (421,025; 628,975).

b2) Determinar el tamaño de muestra necesario para reducir a la tercera parte la amplitud del intervalo obtenido en b1), manteniendo el mismo nivel de confianza.

El intervalo del apartado anterior presenta una amplitud de 207,95, que deseamos reducir hasta su tercera parte (63,316). Dado que los intervalos de confianza para la media poblacional son simétricos, la amplitud será A=2ε, de donde se deriva que ahora el margen de error a considerar es 34,658. El tamaño muestral asociado a este nuevo margen de error se obtiene mediante la expresión:

$$n=\left(\frac{k\sigma}{\varepsilon}\right)^2=\left(\frac{(1{,}96)150}{34{,}658}\right)^2=71{,}93\rightarrow n=72$$