



Tema 6: Introducción al muestreo. Estimadores

RESTAURANTE Los tiempos de espera (en minutos) de los clientes de un restaurante hasta ocupar una mesa se distribuyen uniformemente en el intervalo $[0, \theta]$.

- Estudiar el sesgo de la media muestral como estimador del parámetro θ .
- Obtener un estimador de θ por el método de los momentos.
- Comparar la eficiencia de los dos estimadores anteriores de θ .

[Extraído de *Análisis de Datos Económicos II. Métodos Inferenciales*, problema 5.5, pág. 299]

SOLUCIÓN

- Estudiar el sesgo de la media muestral como estimador del parámetro θ .

El sesgo de la media muestral es el error esperado asociado al estimador, que vendrá dado por la siguiente expresión:

$$B_{\bar{X}}(\theta) = E(e_{\bar{X}}) = E(\bar{X}) - \theta$$

Dado que $X \sim U[0, \theta]$, $E(X) = \theta/2$. En consecuencia, teniendo en cuenta que la esperanza de la media muestral es la media poblacional, se obtiene en este caso:

$$B_{\bar{X}}(\theta) = \frac{\theta}{2} - \theta = -\frac{\theta}{2}$$

- Obtener un estimador de θ por el método de los momentos.

Para obtener el estimador igualaremos el primer momento muestral al poblacional, con lo cual se tiene:

$$\bar{X} = E(X) = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \hat{\theta} = 2\bar{X}$$

- Comparar la eficiencia de los dos estimadores anteriores de θ .

Para estudiar cuál de los estimadores resulta más eficiente en términos relativos, debemos comparar sus errores cuadráticos medios, para los que se obtienen los siguientes resultados:

$$ECM_{\bar{X}}(\theta) = B_{\bar{X}}(\theta)^2 + \text{Var}(\bar{X}) = \left(-\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2(3n+1)}{12n}$$

$$ECM_{2\bar{X}}(\theta) = B_{2\bar{X}}(\theta)^2 + \text{Var}(2\bar{X}) = \frac{4\theta^2}{12n}$$

donde hemos tenido en cuenta que, por tratarse de un modelo uniforme en el intervalo $[0, \theta]$:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\text{Var}(X)}{n} = \frac{\theta^2}{12n}$$



Comparando los ECM, se llega a la conclusión de que el estimador $2\bar{X}$ es más eficiente que $\bar{X}$ puesto que:

$$\frac{4\theta^2}{12n} < \frac{\theta^2(3n+1)}{12n}$$