Tema 5: Análisis conjunto y teoremas límite

AUTOBÚS El tiempo que tarda un autobús interurbano en efectuar su ruta habitual entre dos ciudades (en minutos) es una variable aleatoria con esperanza 20 y desviación típica 6.

a) Si el autobús realiza en un día 25 desplazamientos, obtener la probabilidad de que el tiempo medio empleado se desvíe de su esperanza en más de 4 minutos.

b) ¿Cambiaría la respuesta al apartado anterior si el autobús pasase a realizar 32 desplazamientos al día?

c) La probabilidad de que no queden plazas disponibles en el autobús y que, por tanto, un cliente deba esperar al siguiente servicio es de un 10%. Si un individuo utiliza dicho transporte dos veces al día, ¿cuál es la probabilidad de que en 20 días tenga que esperar en menos de 6 ocasiones al servicio siguiente?

d) El número mensual de averías del autobús sigue una distribución de Poisson con esperanza 0,3. Obtener la probabilidad de que en un trimestre el autobús sufra dos averías.

SOLUCIÓN

a) Si el autobús realiza en un día 25 desplazamientos, obtener la probabilidad de que el tiempo medio empleado se desvíe de su esperanza en más de 4 minutos.

Dado que no disponemos de información exacta sobre la distribución del tiempo empleado para efectuar la ruta (X), la probabilidad será acotada por medio de la desigualdad de Chebyshev. Asumiendo que los tiempos empleados en cada desplazamiento son independientes e idénticamente distribuidas, la probabilidad pedida para el promedio de las 25 desplazamientos será:

$$P\left(\left|\overline{X}_{25} - 20\right| \geq 4\right) \leq \frac{6^2}{25 * 4^2} = 0{,}09$$

b) ¿Cambiaría la respuesta al apartado anterior si el autobús pasase a realizar 32 desplazamientos al día?

Dado que los desplazamientos son 32, el tamaño de muestra es suficientemente elevado para aplicar el Teorema Central del Límite; es decir, el tiempo medio se distribuirá aproximadamente según un modelo normal, en este caso N(20; 1,06). La probabilidad pedida será aproximadamente por tanto:

$$P\left(\left|\overline{X}_{32} - 20\right| \geq 4\right) = P\left(\left|\frac{\overline{X}_{32} - 20}{1{,}06}\right| \geq \frac{4}{1{,}06}\right) = P\left(|Z| \geq \frac{4}{1{,}06}\right) = P\left(|Z| \geq 3.77\right) = 0{,}0002$$

c) La probabilidad de que no queden plazas disponibles en el autobús y que, por tanto, un cliente deba esperar al siguiente servicio es de un 10%. Si un individuo utiliza dicho transporte dos veces al día, ¿cuál es la probabilidad de que en 20 días tenga que esperar en menos de 6 ocasiones al servicio siguiente?

Definimos inicialmente una variable Y_i que adopta valor 1 si el cliente ha de esperar al siguiente servicio en un desplazamiento y 0 en caso contrario. Dicha variable se adapta al modelo de Bernoulli, $Y_i \approx B(p=0,1)$.

Dado que las observaciones son independientes y que p es constante (10%), la suma:

$$S_{40} = \sum_{i=1}^{40} Y_i$$

recogerá el número de desplazamientos de los 40 realizados en los que ha de esperar al siguiente servicio y seguirá un modelo binomial con n=40 y p=0,1. Sin embargo, gracias al elevado tamaño considerado, es posible aplicar el Teorema Central del Límite (enunciado de De Moivre) que garantiza la aproximación normal:

$$S_{40} \to N\left(np = 4, \sqrt{npq} = 1,90\right)$$

Para calcular la probabilidad pedida aplicamos la corrección de continuidad, con lo cual se obtiene:

Para el caso discreto: $P(S_{40} < 6) = P(S_{40} \le 5)$

Aplicando la corrección: $P\left(\frac{S_{40} - 4}{1,90} < \frac{5,5 - 4}{1,9}\right) = P(Z < 0,79) = 0,7852$

d) El número mensual de averías del autobús sigue una distribución de Poisson con esperanza 0,3. Obtener la probabilidad de que en un trimestre el autobús sufra dos averías.

La variable aleatoria que recoge el número de averías en un mes (W) se distribuye según un modelo de Poisson, $W \approx P(\lambda=0,3)$. Denotaremos por W_3 el número de averías trimestrales,

$$W_3 = \sum_{i=1}^{3} W_i$$

Bajo el supuesto de independencia, $W_3 \approx P(\lambda_3 = 0,3*3 = 0,9)$.

$P(W_3 = 2) = 0,1647$