



Tema 4: Modelos de probabilidad continuos

AGUA El consumo mensual de agua de los hogares en cierto país (expresado en m³) sigue una distribución normal $N(15, 3)$.

- a) Calcular la probabilidad de que el consumo mensual de un hogar sea superior a 19 m³.
- b) Completar la siguiente afirmación: El consumo mensual de agua del 25% de los hogares está por debajo de _____ m³.
- c) Se ha observado que entre los hogares que consumen más de 19 m³ al mes un 15% despilfarra agua, bajando dicho porcentaje al 8% entre los hogares cuyo consumo mensual no sobrepasa dicha cantidad. Seleccionado al azar un hogar, ¿cuál es la probabilidad de que despilfarre agua?

SOLUCIÓN

- a) Calcular la probabilidad de que el consumo mensual de un hogar sea superior a 19 m³.

La variable aleatoria X que recoge el “consumo mensual de agua de los hogares (m³)” sigue una distribución normal $X \sim N(15, 3)$; por tanto:

$$P(X > 19) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - P\left(Z < \frac{19-15}{3}\right) = 1 - P(Z < 1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$$

- b) Completar la siguiente afirmación: El consumo mensual de agua del 25% de los hogares está por debajo de _____ m³.

En este caso buscamos el valor a necesario para garantizar que $P(X \leq a) = 0,25$.

Consultando en las tablas de la distribución normal estándar obtendremos el valor tipificado:

$$P(X \leq a) = P\left(\frac{X-15}{3} \leq \frac{a-15}{3}\right) = 0,25$$

$$\text{siendo } \frac{a-15}{3} = -0,67$$

de donde resulta aproximadamente $a = 12,99$; esto es, el consumo mensual de agua del 25% de los hogares está por debajo de 12,99 m³

- c) Se ha observado que entre los hogares que consumen más de 19 m³ al mes un 15% despilfarra agua, bajando dicho porcentaje al 8% entre los hogares cuyo consumo mensual no sobrepasa dicha cantidad. Seleccionado al azar un hogar, ¿cuál es la probabilidad de que despilfarre agua?

Las dos categorías de consumo (más de 19 m³ al mes y como mucho 19 m³) constituyen una partición o sistema completo de sucesos: ambos son factibles, son incompatibles entre sí y su unión cubre todo el espacio muestral. Denotemos estos sucesos por M (consumir más de 19 m³ al mes) y $\bar{M}$ (consumir como mucho 19 m³ al mes), siendo D el suceso “despilfarrar agua”.



Dado que la información disponible nos proporciona las verosimilitudes del suceso D bajo los distintos elementos de la partición, para calcular la probabilidad de que un hogar cualquiera despilfarre agua aplicaremos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D/M)P(M) + P(D/\bar{M})P(\bar{M})$$

donde las probabilidades iniciales son $P(M)=P(X>19)=0,0918$ y $P(\bar{M}) = P(X \leq 19) = 0,9082$.
Por su parte las verosimilitudes son: $P(D/M)=0,15$ y $P(D/\bar{M}) = 0,08$.

Esto es:

$$P(D)=0,15 P(X>19)+0,08 P(X\leq 19)=(0,15)(0,0918)+(0,08)(0,9082)=0,0864$$