



Tema 2: Magnitudes aleatorias

DEMANDA La demanda de cierto artículo es una variable aleatoria con la siguiente distribución:

Número de unidades demandadas	1	2	3	4
Probabilidad	0,25	0,45	0,15	0,15

- ¿Es realmente una función de probabilidad?
- Obtener la función de distribución. ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda sea inferior a 4 unidades?
- Calcular e interpretar el valor esperado y la varianza de la variable.

[Adaptado de PERALTA, M.J. y otros (2000): *Estadística. Problemas resueltos*. Ed. Pirámide. Ejercicio 5, pág. 203]

Resultados

- Sí
- $F(x) = 0$ si $x < 1$
 $F(x) = 0,25$ si $1 \leq x < 2$
 $F(x) = 0,70$ si $2 \leq x < 3$
 $F(x) = 0,85$ si $3 \leq x < 4$
 $F(x) = 1$ si $4 \leq x$
 $P(X < 4) = 0,85$
- $E(X) = 2,2$; $\text{Var}(X) = 0,96$

FÚTBOL La variable X recoge el número de goles que cierto equipo de fútbol marca en cada partido, obteniendo la siguiente información sobre el número de goles marcados en los últimos 100 partidos.

Número de goles	Número de partidos
0	40
1	30
2	15
3	10
4	5

- Obtener la distribución de probabilidad de la variable X “número de goles marcados por partido”.
- ¿Cuál es el número esperado de goles por partido? Cuantificar su dispersión.
- Ante la escasez goleadora la directiva decide incentivar a sus jugadores ofreciendo al equipo una prima de 600 euros por cada gol marcado. Obtener la distribución de la variable “ingresos de la plantilla por goles marcados en un partido”.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la plantilla de jugadores obtenga más de 1.200 euros en un partido? Obtener el ingreso esperado en concepto de primas por goles marcados en un partido.



Resultados

a)

$$P(X=0)=0,4$$

$$P(X=1)=0,3$$

$$P(X=2)=0,15$$

$$P(X=3)=0,1$$

$$P(X=4)=0,05$$

b)

$$E(X)=1,1 ; \text{Var}(X)=1,39$$

c)

$$P(Y=0)= 0,4$$

$$P(Y=600)=0,3$$

$$P(Y=1.200)=0,15$$

$$P(Y=1.800)=0,1$$

$$P(Y=2.400)=0,05$$

$$P(Y>1.200) = 0,15$$

$$E(Y)= 660$$

ALMACENES El gasto diario (en euros) efectuado por un cliente en unos grandes almacenes se distribuye según la siguiente función de densidad:

$$f(x)=x^2/9000 \quad \text{si } 0 < x < 30$$

$$f(x)=0 \quad \text{en el resto}$$

- a) Obtener la probabilidad de que el cliente tenga un gasto diario comprendido entre 15 y 20 euros.
- b) ¿Cuál es el gasto diario esperado?; ¿y la varianza del gasto?
- c) Los grandes almacenes concederán durante el próximo invierno los siguientes “bonos descuento” según el volumen de gasto: 1 euro si el gasto oscila entre 10 y 20 euros; 1,5 euros si el gasto oscila entre 20 y 25 euros; 3 euros si el gasto supera los 25 euros
- d) Obtener la distribución y el valor esperado del descuento diario obtenido por este cliente de los grandes almacenes.
- e) Durante cierto día, un cliente ha utilizado su tarjeta de crédito para efectuar los pagos en los grandes almacenes, por lo que el importe de su compra ha sido recargado en un 4%. ¿Cuál es la probabilidad de que ese cliente haya pagado entre 10 y 15 euros?

Resultados

a) $P(15 < X < 20) = 0,1713$

b) $E(X) = 22,5 ; \text{Var}(X) = 33,75$

c)

$$P(Y=0)= 0,037$$

$$P(Y=1)=0,2592$$

$$P(Y=1,5)=0,2825$$

$$P(Y=3)=0,4213$$

$$E(Y)=1,947$$

PYMES La variable aleatoria X que recoge los costes mensuales (en miles de euros) de implementación y desarrollo de nuevas tecnologías en las PYMES de cierta región se distribuye según la función de densidad:



$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Determinar el valor de a.
- b) Obtener y representar gráficamente la función de distribución.
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que dichos costes mensuales sean superiores a los 2.000 euros?

Resultados

a) $a=1/8$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \frac{t}{8} dt = \frac{x^2}{16} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

c)

$P(X > 2) = 0,75$

CASINO La publicidad de un casino anuncia que el premio esperado por sus jugadores es de 600 euros con un riesgo $\sigma=360$.

- a) Obtener la probabilidad de que un jugador cualquiera obtenga un resultado entre 150 y 1050 euros.
- b) ¿Cómo se vería afectada esta probabilidad si tuviésemos un riesgo $\sigma=420$?
- c) ¿Cuál será la probabilidad de que el premio obtenido por un jugador se desvíe al menos 504 euros del premio esperado?

[Extraído de *Análisis de Datos Económicos II. Métodos inferenciales*, problema 2.3 pág. 103-104]

Resultados

a) $P(|X - E(X)| < 450) \geq 0,36$

b) $P(|X - E(X)| < 450) \geq 0,1289$

c) $P(|X - E(X)| \geq 504) \leq 0,5102$

TRANSFORMACIÓN

- a) Sea X una variable aleatoria continua, demostrar que para una constante cualquiera a se verifica: $E(aX+c) = aE(X) + c$.
- b) Sea X una variable aleatoria, demostrar que para dos constantes cualesquiera a y c se verifica: $\text{Var}(aX + c) = a^2\text{Var}(X)$

PROYECTO Un economista quiere estimar el coste total de un proyecto para hacer una oferta adecuada del mismo. Valora su trabajo en una parte fija de 12.000 euros y otra variable de 300 euros por día trabajado.

El proyecto lo puede realizar entre 7 y 11 días, por lo que construye una distribución de probabilidades subjetivas para la variable aleatoria X: "Número de días que tardará en realizar el proyecto":



X	7	8	9	10	11
P(X=x)	0,10	0,20	?	0,30	0,10

- a) ¿Qué probabilidad le habrá asignado, necesariamente, a que el proyecto sea realizado en 9 días? Justificar la respuesta.
- b) Determinar el coste esperado del proyecto y la varianza del mismo. Un 7% del coste total se dedica al pago de tasas e impuestos. Calcular el pago esperado en impuestos.

[Adaptado de ESTEBAN, J. et. al. (2004): *Estadística Descriptiva y nociones de Probabilidad. Estadística I. Probabilidad*. Ed. Thomson. Ejercicio 7.7 pág. 267]

Resultados

- a) $P(X=9)=0,3$
b) $E(C)=14730$; $\text{Var}(C)=116100$; $E(I)=1031,1$

PRODUCCIÓN El volumen de producción de una empresa es una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 < x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Determinar el valor de a.
- b) Obtener la función de distribución de este modelo.
- c) Sabiendo que los costes totales de esa empresa (en miles de euros) vienen definidos por $C=3+0,18X$, analizar la distribución probabilística de los costes.

Resultados

- a) $a=0,08$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x 0,08t dt = 0,08 \frac{x^2}{2} = 0,04 x^2 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

c)

$$f_c(c) = \frac{0,08(c-3)}{0,18^2} \quad \text{para } 3 < c < 3,9$$

$$f_c(c) = 0 \quad \text{en otro caso}$$

INGRESOS Los ingresos anuales (en miles de euros) de cierto individuo se distribuyen según la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{120-x}{2400} & 40 < x < 80 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



- a) ¿Cuál es la probabilidad de que los ingresos superen los 60.000 euros? ¿Y de qué oscilen entre 50.000 y 70.000 euros?
- b) Calcular el ingreso anual esperado y la varianza del ingreso.
- c) Este individuo participa en una ONG a la que contribuye anualmente con cierta cantidad en función de sus ingresos:
- Si son inferiores a 50.000 euros, dona 1.500 euros
 - Si oscilan entre 50.000 y 65.000 euros, 2.500 euros
 - Si superan los 65.000 euros, el donativo es de 5.000 euros
- Determinar la distribución de probabilidad del donativo. ¿Cuál es su valor esperado?

Resultados

a) $P(X > 60) = 0,417$; $P(50 \leq X \leq 70) = 0,5$

b) $E(X) = 57.800$; $\text{Var}(X) = 125,9$

c)

$P(Y = 1500) = 0,3125$

$P(Y = 2500) = 0,3906$

$P(Y = 5000) = 0,2969$

$E(Y) = 2929,75$

COCHES Una familia está estudiando el consumo de combustible (en litros) de su vehículo, que presenta un consumo esperado μ de 160 litros al mes con una desviación típica σ de 8.

- a) Calcular la probabilidad de que en un mes cualquiera el consumo de combustible de este vehículo difiera en menos de 10 litros del consumo esperado.
- b) Debido a un mal uso el vehículo ha aumentado su consumo mensual en 10 litros. Justificar como afectaría esta situación a la esperanza y a la varianza del consumo de combustible.

Resultados

a) $P(|X - \mu| < 10) \geq 0,36$

b) $E(Y) = 170$; $\text{Var}(Y) = 64$