

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 8: ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

8.1.- Introducción a la estimación por intervalos

8.2.- Intervalos de confianza. Construcción y características

8.3.- Intervalos de confianza para la media

8.4.- Intervalos de confianza para la proporción

8.5.- Intervalos de confianza para la varianza



TEMA 8. COMPETENCIAS

El objetivo de este tema es estudiar los procedimientos de estimación por intervalos.

Una vez superado el tema los alumnos serán capaces de:

- Describir las ventajas y limitaciones de las estimaciones puntual y por intervalos .
- Interpretar las características de precisión y confianza de una estimación.
- Construir intervalos de confianza para la media.
- Calcular el tamaño de muestra para llevar a cabo una estimación de la media.
- Construir intervalos de confianza para la proporción y la varianza.
- Calcular el tamaño de muestra necesario para llevar a cabo una estimación de la proporción.



MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 8: ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

8.1.- Introducción a la estimación por intervalos



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Estimación puntual

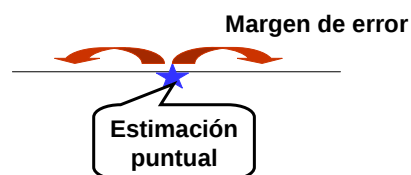
OBJETIVO Aproximación del parámetro desconocido

HERRAMIENTA Estimador

No es posible conocer la bondad de una estimación puntual

ALTERNATIVA

Construir un intervalo o banda de confianza



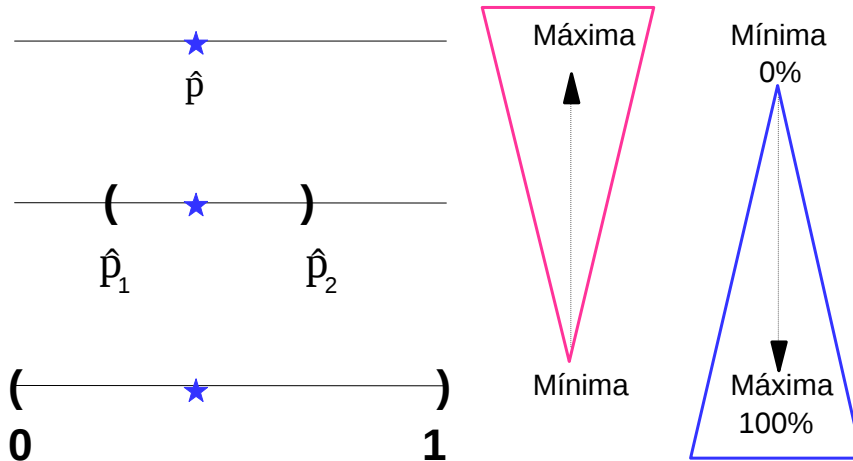
Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Características de la estimaciones

Estimación de p

Precisión

Confianza



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

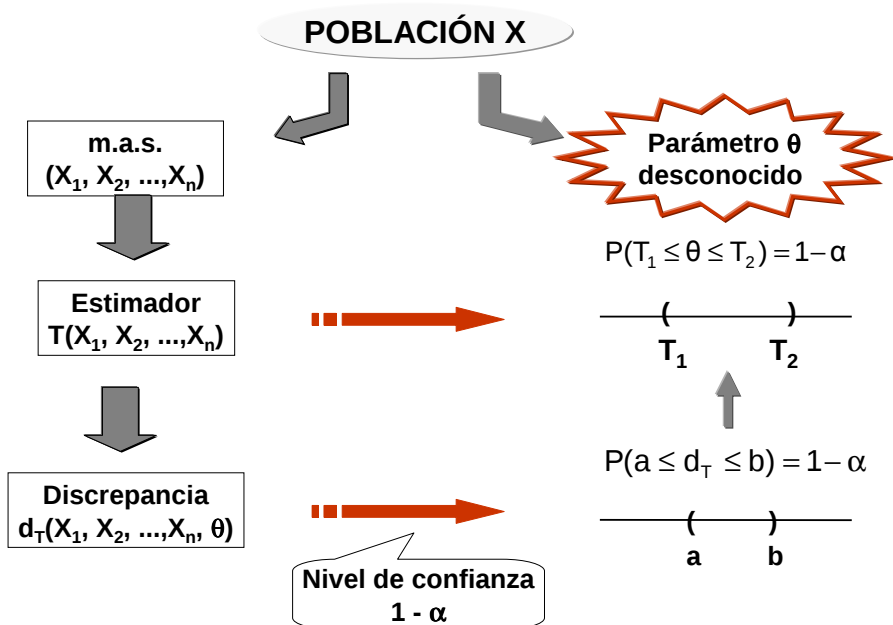
TEMA 8: ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

8.2.- Intervalos de confianza. Construcción y características



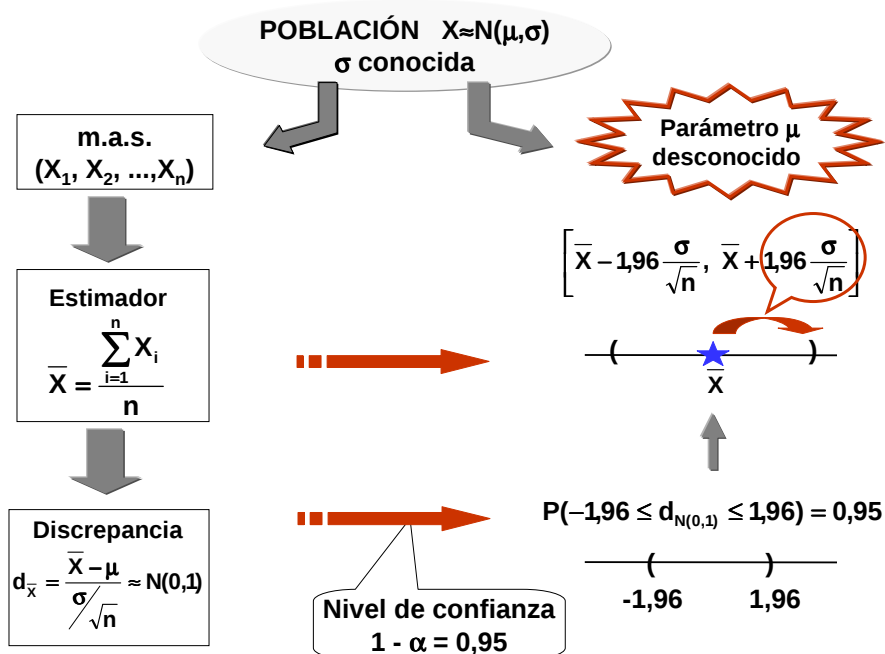
Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Construcción de intervalos de confianza



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

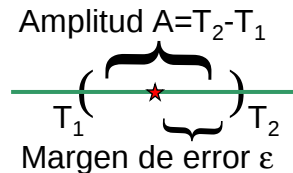
Ilustración. Intervalo de confianza para la media



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Precisión de los intervalos

La precisión de los intervalos se mide a través de la amplitud, A , o también, en el caso de intervalos simétricos, a través del margen de error, $\varepsilon = A/2$



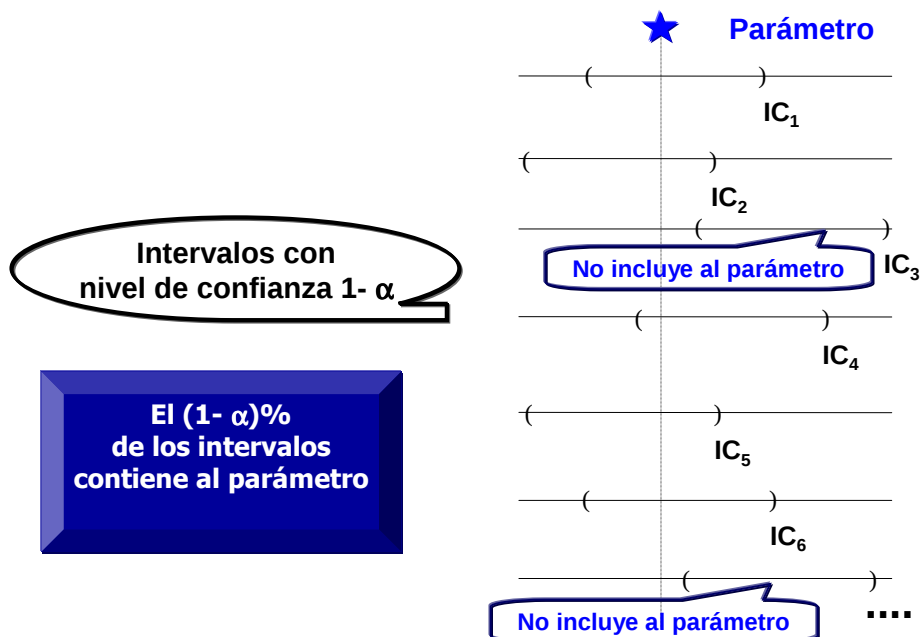
Factores que afectan a la precisión:

- Nivel de confianza
- Información poblacional (modelo y parámetros)
- Información muestral (tamaño, método de selección muestral y estimador utilizado)



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Interpretación del nivel de confianza



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 8: ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

8.3.- Intervalos de confianza para la media



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Intervalos de confianza para la media

POBLACIÓN NORMAL
 σ conocida

POBLACIÓN NO NORMAL
 σ conocida y n elevado

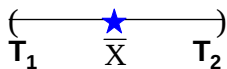
$$d_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

Distribución $N(0,1)$



Valor de k

$$P(-k \leq N(0,1) \leq k) = 1 - \alpha$$



$$P(T_1 \leq \mu \leq T_2) = 1 - \alpha$$

Intervalo para la media
con nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left[\bar{X} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$



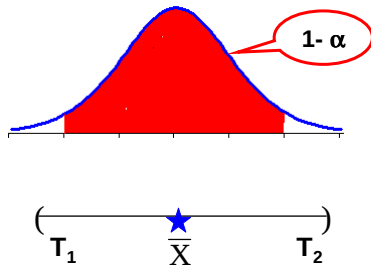
Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Intervalos de confianza para la media

POBLACIÓN NORMAL
 σ desconocida

$$d_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \approx t_{n-1}$$

Distribución t de Student



Valor de k

$$P(-k \leq t_{n-1} \leq k) = 1 - \alpha$$

$$P(T_1 \leq \mu \leq T_2) = 1 - \alpha$$

Intervalo para la media
con nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left[\bar{X} - k \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + k \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

IC para μ en poblaciones desconocidas

Partiendo de una discrepancia con distribución desconocida, la desigualdad de Chebyshev permite construir intervalos que garanticen un nivel de confianza $1 - \alpha$

$$P\left(d_{\bar{X}} - E(d_{\bar{X}}) < k\sigma_{d_{\bar{X}}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$d_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad E(d_{\bar{X}}) = 0 \quad \text{Var}(d_{\bar{X}}) = 1$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \alpha$$

Intervalo para la media
con nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left[\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Intervalos de confianza para la media

Situación

Expresión del intervalo

Nivel de confianza

X Normal, σ conocida
X no Normal, pero σ conocida y n elevado

$$\left[\bar{X} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

k en tablas N(0,1)

$$1-\alpha$$

X Normal, σ desconocida

$$\left[\bar{X} - k \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + k \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

$$1-\alpha$$

k en tablas t Student con n-1 g.l.

X desconocida, σ conocida y n bajo

$$\left[\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\geq 1-\alpha$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Tamaño muestral para la estimación de μ

OBJETIVO

Estimar μ con cierto nivel de confianza $1-\alpha$ y cierto margen de error ε

$X \approx N(\mu, \sigma)$

Tamaño muestral

$$\left[\bar{X} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$



$$\varepsilon = k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



$$n = \left(\frac{k\sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

X desconocida

$$\left[\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$



$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



$$n = \frac{\sigma^2}{\alpha \varepsilon^2}$$

- El tamaño aumenta con el nivel de confianza
- El tamaño aumenta con la dispersión poblacional
- El tamaño aumenta al reducirse el margen de error ε



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 8: ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

8.4.- Intervalos de confianza para la proporción



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Intervalos de confianza para la proporción

n elevado

$$d_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

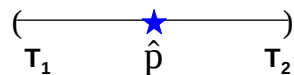
$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}}$$

Distribución N(0,1)



Valor de k

$$P(-k \leq N(0,1) \leq k) = 1 - \alpha$$



$$P(T_1 \leq p \leq T_2) = 1 - \alpha$$

Intervalo para la proporción con nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left[\hat{p} - k \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}}, \hat{p} + k \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}} \right]$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Tamaño muestral para la estimación de p

OBJETIVO

Estimar p con cierto nivel de confianza $1-\alpha$ y cierto margen de error ϵ

$$\left[\hat{p} - k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Tamaño muestral

$$\epsilon = k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow n = k^2 \frac{p(1-p)}{\epsilon^2}$$

Métodos para aproximar $p(1-p)$:

- Seleccionar una muestra piloto que proporcione una primera estimación de p
- Sustituir el valor desconocido $p(1-p)$ por su cota máxima, que es 0,25



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 8: ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

8.5.- Intervalos de confianza para la varianza



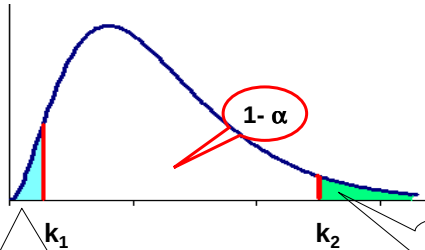
Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Intervalos de confianza para la varianza

POBLACIÓN
NORMAL

$$d_{S^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \approx \chi_{n-1}^2$$

Distribución chi-cuadrado



Valores de k_1 y k_2

$$P(k_1 \leq \chi_{n-1}^2 \leq k_2) = 1 - \alpha$$

$$P(\chi_{n-1}^2 \leq k_1) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(\chi_{n-1}^2 \geq k_2) = \frac{\alpha}{2}$$

Intervalo para la varianza
con nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{k_2}, \frac{(n-1)S^2}{k_1} \right]$$

