

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 7: HERRAMIENTAS INFERENCIALES. DISTRIBUCIONES ASOCIADAS AL MUESTREO

7.1.- Distribuciones asociadas al proceso de muestreo

7.2.- Procesos inferenciales y distribuciones asociadas



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

TEMA 7. COMPETENCIAS

- Describir las distribuciones chi-cuadrado y t de Student.
- Calcular probabilidades y valores sobre las mismas.
- Aplicar las principales expresiones utilizadas en los procesos inferenciales relativos a la media, la proporción y la varianza.



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

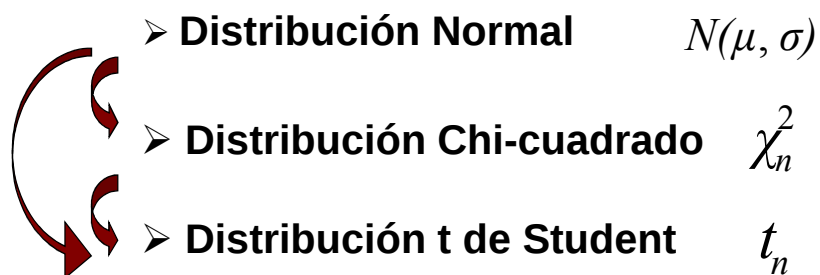
TEMA 7: HERRAMIENTAS INFERENCIALES. DISTRIBUCIONES ASOCIADAS AL MUESTREO

7.1.-Distribuciones asociadas al proceso de muestreo



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Modelos probabilísticos asociados al muestreo



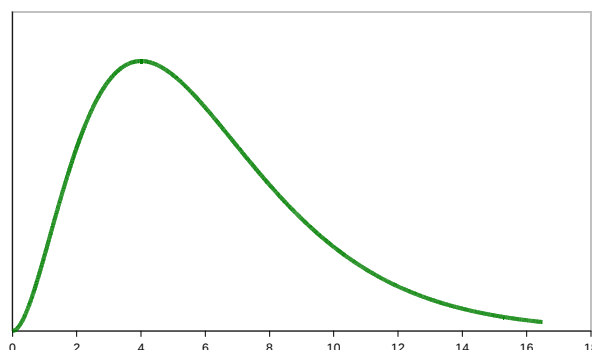
Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Distribución chi-cuadrado

$X_1, \dots, X_n$ v.a. INDEPENDIENTES con distribución $N(0,1)$:

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i^2 \approx \chi_n^2$$

v.a. chi-cuadrado con n grados de libertad



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Grados de libertad

Expresión	VARIABLES ALEATORIAS	RESTRICCIONES	Grados de libertad
$\sum_{i=1}^n X_i^2$	$X_1, X_2, \dots, X_n$	Ninguna	n
$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$X_1, X_2, \dots, X_n$ o bien $X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X}$	$\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \text{Una} \\ \downarrow \end{matrix}$ $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$	n-1

Los **grados de libertad** de una expresión pueden ser interpretados como “**número de valores que es posible fijar de modo arbitrario**”



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Distribución chi-cuadrado

Reproductividad

Dadas dos v.a. independientes $X \approx \chi_n^2$ $Y \approx \chi_m^2$

se cumple:

$$X + Y \approx \chi_{n+m}^2$$

El modelo chi-cuadrado es REPRODUCTIVO respecto a los grados de libertad.



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Teorema de Fisher

Dada una m.a.s. $(X_1, \dots, X_n)$ extraída de una población $N(\mu, \sigma)$, se cumple:

→ La media muestral $\bar{X}$ y la varianza muestral S^2 son variables aleatorias independientes

→ La expresión aleatoria $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ se distribuye según un modelo chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad χ_{n-1}^2

VARIANZA MUESTRAL



$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$



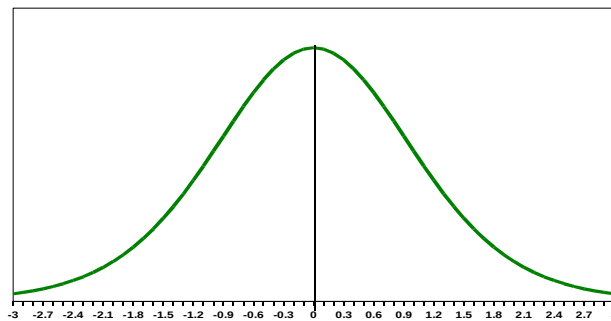
Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Distribución t de Student

X, Y v.a. INDEPENDIENTES $X \approx N(0,1)$ $Y \approx \chi_n^2$

Entonces:
$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \approx t_n$$

v.a. t de Student con n grados de libertad



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

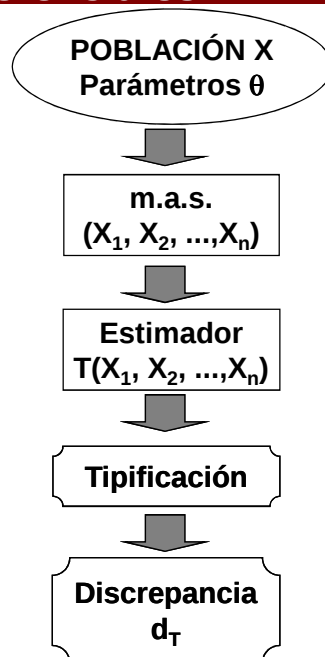
TEMA 7: HERRAMIENTAS INFERENCIALES. DISTRIBUCIONES ASOCIADAS AL MUESTREO

7.2.- Procesos inferenciales y distribuciones asociadas



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Discrepancias asociadas a los procesos inferenciales



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Discrepancias tipificadas

- La información muestral se resume en el estimador.
- El estimador se tipifica, obteniéndose la *discrepancia tipificada*, cuya distribución de probabilidad es conocida y no depende de ningún parámetro desconocido.



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Estimador de la media poblacional

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

← MEDIA MUESTRAL

$$E(\bar{X}) = \mu$$

Estimador insesgado

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Error estándar

➤ Si $X \approx N(\mu, \sigma)$ entonces $\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

➤ Si la distribución de X es desconocida y n elevado $\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Inferencias sobre la media poblacional

ESTIMADOR

$$\bar{X}$$

DISCREPANCIA

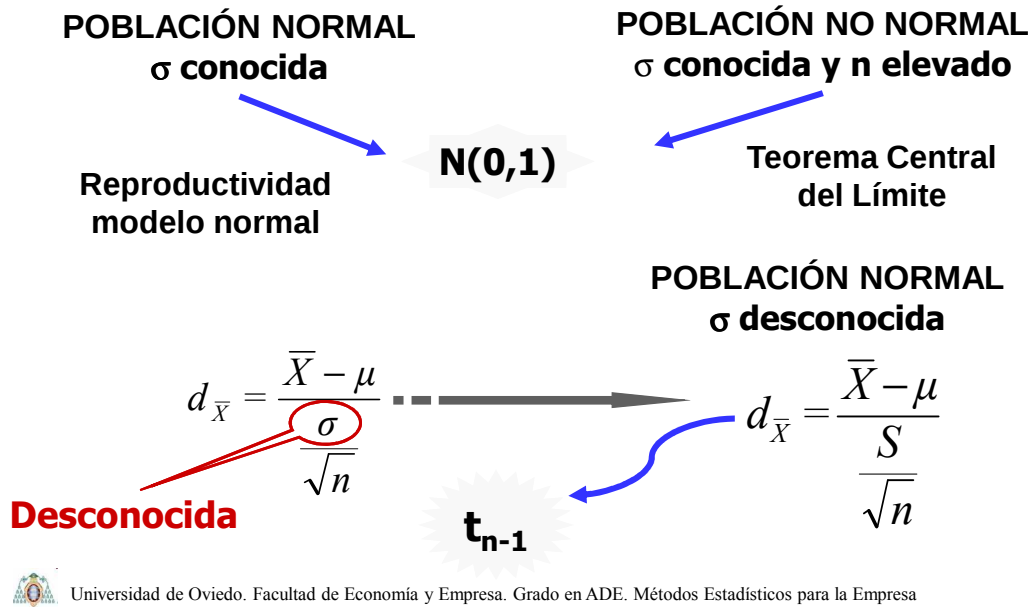
$$d_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Inferencias sobre la media poblacional

¿Qué distribución probabilística sigue la discrepancia asociada a la media muestral?



Estimador de la proporción poblacional

$(X_1, \dots, X_n)$ m.a.s. siendo X_i v.a. dicotómicas o de Bernoulli:

$X_i=1$	si se presenta la característica investigada	$P(X_i=1)=p$
$X_i=0$	en otro caso	$P(X_i=0)=1-p$

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

PROPORCIÓN MUESTRAL

X "Número de elementos de la muestra que presentan la característica investigada"

$$X \approx B(n, p)$$

$$E(\hat{p}) = \frac{E(X)}{n} = \frac{np}{n} = p$$

$$Var(\hat{p}) = \frac{Var(X)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

Estimador insesgado

Inferencias sobre la proporción poblacional

ESTIMADOR

$$\hat{p}$$

DISCREPANCIA

$$d_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Teorema Central
del Límite

n elevado

N(0,1)

$$d_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}}}$$

p desconocida



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Estimador de la varianza poblacional

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

Estimador analógico

$$E(S_n^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

Estimador
sesgado

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

VARIANZA MUESTRAL

$$E(S^2) = E\left(\frac{n}{n-1} S_n^2\right) = \frac{n}{n-1} E(S_n^2) = \sigma^2$$

Estimador
insesgado



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Inferencias sobre la varianza poblacional

DISCREPANCIA

$$d_{S^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Teorema de Fisher

$$\chi_{n-1}^2$$

POBLACIÓN
NORMAL



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

¿Qué parámetros nos interesan?

Media
 μ

Proporción
 p

Varianza
 σ^2

¿Qué estimadores utilizamos?

Media
 $\bar{X}$

Proporción
 $\hat{p}$

Varianza
 S^2

Normal
t de Student

Chi-Cuadrado

¿Qué distribuciones de probabilidad podemos utilizar?



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa