

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 6: INTRODUCCIÓN AL MUESTREO. ESTIMADORES

- 6.1.- Encuestas muestrales. Técnicas de selección muestral.**
- 6.2.- Muestreo aleatorio simple. Distribución de la muestra.**
- 6.3.- Estimadores y sus propiedades**
- 6.4.- Métodos de obtención de estimadores**



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

TEMA 6. COMPETENCIAS

- Entender la importancia de la información muestral.
- Comprender las ideas básicas del muestreo.
- Describir el concepto de estimador
- Calcular e interpretar el sesgo y el error cuadrático medio de un estimador.
- Comprender el significado de las propiedades de los estimadores.
- Deducir el estimador máximo-verosímil de un parámetro.



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 6: INTRODUCCIÓN AL MUESTREO. ESTIMADORES

6.1.- Encuestas muestrales. Técnicas de selección muestral



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Los métodos inferenciales

- Modelo probabilístico conocido
- Teoremas límites
- Acotación de Chebyshev

- Información muestral sobre X
($X_1, X_2, \dots, X_n$)
- Técnicas inferenciales
Estimación
Contraste de hipótesis

Magnitud aleatoria X

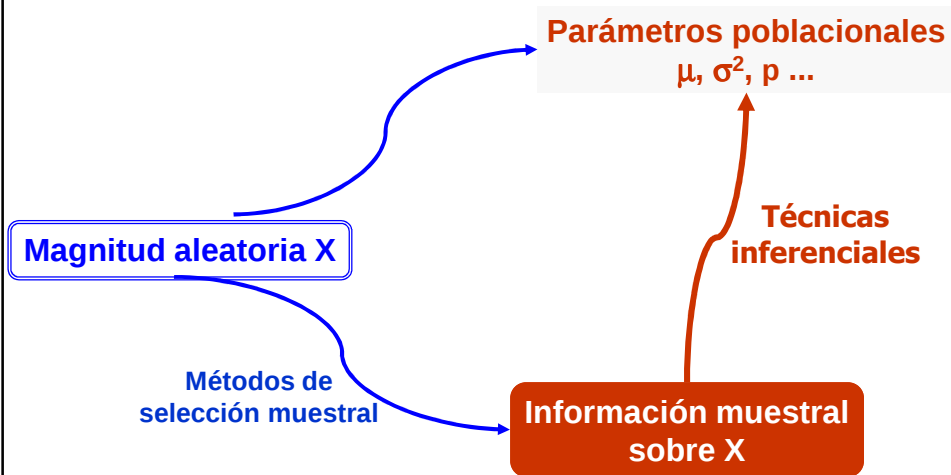
Cálculo de
probabilidades
sobre X

Inferencias
sobre X



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Los métodos inferenciales



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Métodos inferenciales. Ilustración

X “Demanda mensual de gasolina”

Información muestral sobre X

Estimación de la demanda mensual media

Aproximación puntual
Intervalos de confianza

Contraste de hipótesis sobre la demanda

Hipótesis: La demanda mensual media es de al menos 12.000 litros

¿Existe evidencia muestral para rechazar este supuesto?



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Necesidad de los estudios muestrales

ESTUDIOS CENSALES

- Imprescindibles en recuentos e investigaciones exhaustivas
- Exigen amplios recursos humanos y materiales
- Largo tiempo de ejecución
- Costes elevados

- Permiten ahorro económico y de trabajo de campo
- Convenientes en poblaciones homogéneas
- Imprescindibles en procesos destructivos y poblaciones infinitas

ESTUDIOS MUESTRALES



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Diseño de encuestas

i) Fase preliminar: objetivos del estudio

ii) Determinación del marco

- Unidades elementales
- Información complementaria

iii) Selección muestral

- Muestreo aleatorio con reposición
- Muestreo aleatorio sin reposición

.....

iv) Transmisión de la información

- Contexto del estudio
- Trabajo de campo

v) Tratamiento estadístico de la información

- Tabulación y síntesis
- Técnicas inferenciales

vi) Evaluación de resultados



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Métodos de selección muestral



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 6: INTRODUCCIÓN AL MUESTREO. ESTIMADORES

6.2.- Muestreo aleatorio simple. Distribución de la muestra



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MUESTRA ALEATORIA SIMPLE



MUESTRAS ALEATORIAS

Muestra Aleatoria Simple
(m.a.s.)

Muestra seleccionada de
una población infinita

Muestra seleccionada de una
población finita con reposición



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Muestra aleatoria simple (m.a.s.)

- Las m.a.s. son muestras seleccionadas de poblaciones infinitas o bien de poblaciones finitas con reposición
- Las m.a.s. se identifican con v.a. n - dimensionales cuyas componentes son i.i.d. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Distribución de probabilidad de una m.a.s.

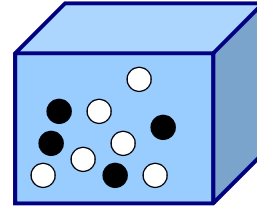
$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F(x_1) \dots F(x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i)$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Distribución muestral

$$X = \begin{cases} 0 & P(X = 0) = P(\text{negro}) = 0,4 \\ 1 & P(X = 1) = P(\text{blanco}) = 0,6 \end{cases}$$



Resultado de la extracción sucesiva de dos bolas con reposición: (X_1, X_2)

Observaciones muestrales	(x_1, x_2)	$P(x_1, x_2)$
(B,B)	(1,1)	0,36
(B,N)	(1,0)	0,24
(N,B)	(0,1)	0,24
(N,N)	(0,0)	0,16



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

RESUMEN DE INFORMACIÓN MUESTRAL

Información muestral
 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$



Realización muestral
 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$



SÍNTESIS

Estadístico
 $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$



Valor del estadístico
 $t = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$



Inferencias



Conclusión
Estimaciones, contrastes



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Ilustración: El estadístico MEDIA MUESTRAL

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ m. a. s.



$$T = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. independientes e idénticamente distribuidas; $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

$$E(T) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu}{n} = \mu$$

$$\text{Var}(T) = \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 6: INTRODUCCIÓN AL MUESTREO. ESTIMADORES

6.3.- Estimadores y sus propiedades



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Propiedades de los estimadores

i) Ausencia de sesgo

Comportamiento imparcial o centrado

ii) Eficiencia

Bajo riesgo

iii) Suficiencia

Aprovechamiento de la información muestral

iv) Consistencia

Convergencia al valor del parámetro

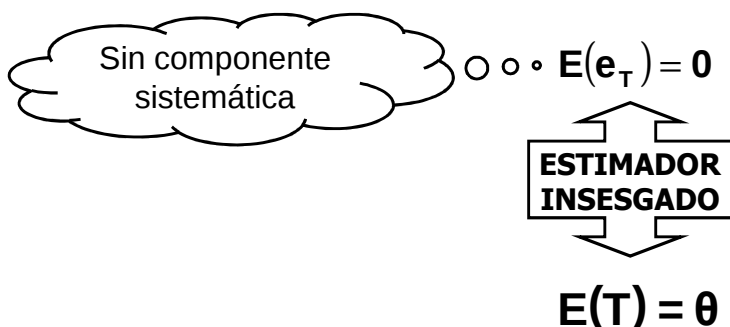


Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Ausencia de sesgo

T estimador del parámetro θ

ERROR ALEATORIO asociado a T: $e_T = T - \theta$



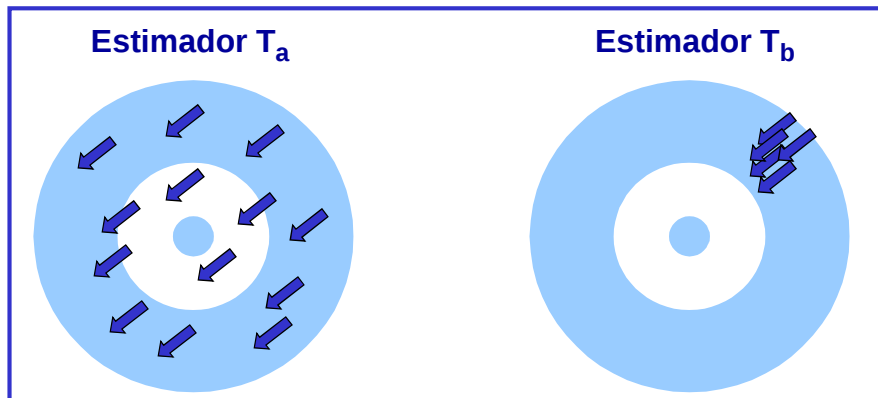
SESGO

$$B_T(\theta) = E(e_T) = E(T) - \theta$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Eficiencia



ERROR CUADRÁTICO MEDIO

$$ECM_T(\theta) = E(e_T^2) = E[(T - \theta)^2]$$

$$ECM_T(\theta) = B_T^2(\theta) + \text{Var}(T)$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Eficiencia relativa

Para cualesquiera T_1 y T_2 estimadores de θ se dice que T_1 **es más eficiente que** T_2 si su Error Cuadrático Medio es inferior:

$$ECM_{T_1} < ECM_{T_2}$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Suficiencia y Consistencia

Un estimador T es **suficiente** para estimar un parámetro θ cuando es **capaz de asimilar toda la información muestral** disponible sobre el parámetro.

La sucesión de estimadores T_n de θ es **consistente** si **converge al valor del parámetro**.



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 6: INTRODUCCIÓN AL MUESTREO. ESTIMADORES

6.4.- Métodos de obtención de estimadores



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Función de verosimilitud

Población X

$F(x, \theta)$ función de distribución

θ parámetro desconocido

FUNCIÓN DE VEROSIMILITUD

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \prod_{i=1}^n \frac{\partial F(x_i, \theta)}{\partial x_i}$$

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i, \theta) \quad \text{para el caso discreto}$$

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad \text{para el caso continuo}$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Ilustración

Población $X \approx B(p)$
 p : "Proporción de parados"

$X=1$ Individuo en paro
 $X=0$ en otro caso

m.a.s. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Función de verosimilitud:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$$

• Dado p , L recoge la probabilidad de la muestra

(Ejemplo, tasa de paro del 20%)

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0,2)^{\sum_{i=1}^n x_i} (0,8)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$$

• Dada una muestra, L recoge su verosimilitud en función de p
 (Ejemplo, muestra de 20 activos con 5 parados)

$$L(p) = p^5 (1-p)^{15}$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Estimación máximo verosímil

Información Muestral:

$n=5$
2 parados

Espacio paramétrico

$p=25\%$

$p=10\%$

Verosimilitudes

$L=0,026$

$L=0,00729$

Estimación máximo verosímil

$\hat{p} = 25\%$

¿De dónde procede la muestra?



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Método de máxima verosimilitud

$X \approx F(x, \theta); (X_1, X_2, \dots, X_n)$ m.a.s.

Función de verosimilitud: $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$

¿Cómo se determina un estimador máximo verosímil de θ ?

Criterio:

$$\max_{\theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) \iff \max_{\theta} \ln[L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)]$$

Condición necesaria: $\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0$

Condición suficiente: $\frac{\partial^2 \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta^2} < 0$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Estimador máximo verosímil de la proporción

$$L(x, p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \quad \text{Función de verosimilitud}$$

Condición necesaria 

$$\frac{\partial \ln L(x, p)}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[\sum_{i=1}^n x_i \ln(p) + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1-p) \right] = 0 \Rightarrow$$

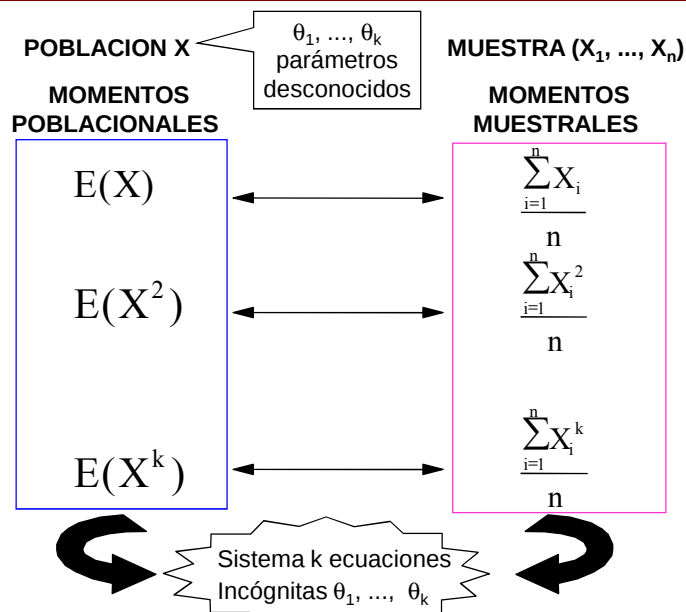
$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

El estimador máximo verosímil de la proporción poblacional p es la proporción muestral $\hat{p}$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Método de los momentos



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa