

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 1: INCERTIDUMBRE Y PROBABILIDAD

1.1.- La probabilidad. Conceptos y cuantificación

1.2.- Definición axiomática de la probabilidad

1.3.- Probabilidad condicionada e independencia

1.4.- Probabilidad total y teorema de Bayes



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

TEMA 1. COMPETENCIAS

En este tema se pretende familiarizar al alumno con el concepto de probabilidad como herramienta para cuantificar la incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios.

Una vez superado el tema los alumnos serán capaces de:

- Entender las diversas concepciones de la probabilidad (clásica, frecuencial y subjetiva).
- Saber distinguir las principales expresiones que aparecen en el cálculo combinatorio.
- Interpretar adecuadamente los conceptos de suceso complementario, unión e intersección de sucesos; sucesos incompatibles y sucesos independientes.
- Identificar una partición de sucesos y aplicar sobre ella los teoremas de la probabilidad total y Bayes.
- Interpretar adecuadamente las probabilidades a priori, a posteriori y las verosimilitudes.



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 1: INCERTIDUMBRE Y PROBABILIDAD

1.1.- La probabilidad. Conceptos y cuantificación



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Motivación

La **probabilidad** es una medida de la **incertidumbre** aplicable a muchas situaciones cotidianas

¿Probabilidad de impago de la deuda?

¿Probabilidad de que suba el IBEX-35?

- ▲ Concepto y significado de la probabilidad
- ▲ Cuantificación numérica
- ▲ Axiomática



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Conceptos de probabilidad

Probabilidad Clásica

$$P(A) = \frac{\text{c.f.}}{\text{c.p.}}$$

¿Cuántos casos posibles hay?
¿Son equiprobables los resultados?

Probabilidad Frecuencial

$$\text{fr}(A) = \frac{n_A}{n} \rightarrow P(A)$$

¿Es posible repetir las observaciones?
¿Se mantienen las condiciones?
¿Es posible observar?

Probabilidad Subjetiva

$P(A)$ = "Grado de creencia en A"

¿Cómo se asignan las probabilidades?



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Cálculo de probabilidades. Teoría combinatoria

¿Cuál es la probabilidad de ganar una apuesta con dados?

... ¿Y de tener premio en la lotería primitiva?

... ¿Y de ser nombrado miembro de un jurado popular?

Variaciones con repetición

Variaciones

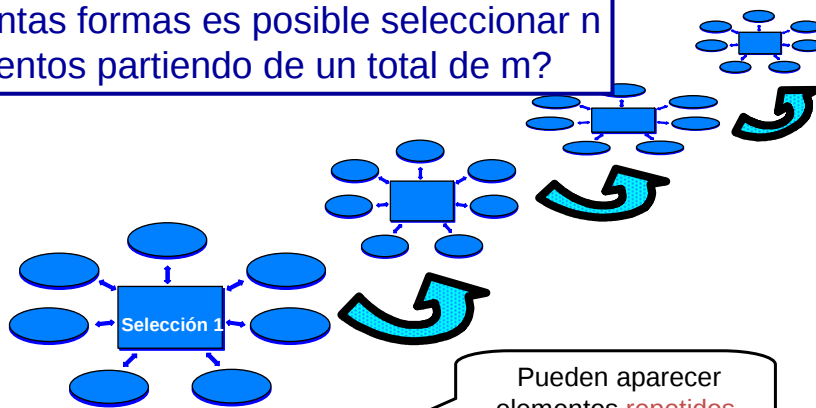
Permutaciones

Combinaciones



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

¿De cuántas formas es posible seleccionar n elementos partiendo de un total de m ?



Variaciones con Repetición

$$VR_{m,n} = m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^n$$

Variaciones sin Repetición

$$V_{m,n} = m \cdot (m - 1) \cdot \dots \cdot (m - n + 1)$$

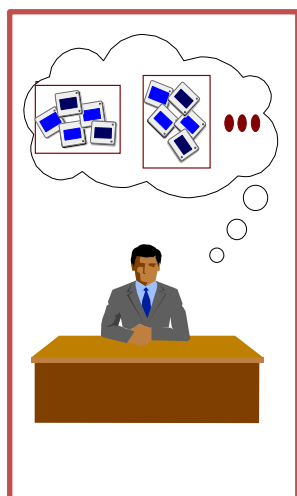
Pueden aparecer elementos **repetidos**

El orden es relevante

El orden es relevante



¿De cuántas formas es posible **ordenar** m elementos?



Permutaciones

$$P_m = m!$$

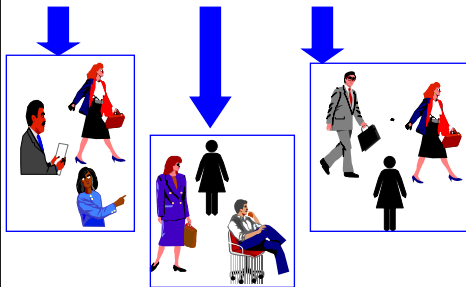


¿De cuántas formas es posible formar grupos de tamaño n partiendo de un total de m elementos?



Combinaciones

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$



El **orden NO** es relevante



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 1: INCERTIDUMBRE Y PROBABILIDAD

1.2.- Definición axiomática de la probabilidad



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Experimentos aleatorios. Conceptos asociados

E	Espacio muestral o suceso seguro (conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio)
A, B ...	Sucesos (subconjuntos de E)
∅	Suceso imposible
A ∪ B	Unión de sucesos (ocurre al menos uno de los dos sucesos)
A ∩ B	Intersección de sucesos (ocurren A y B)
A^c	Suceso complementario de A (no ocurre A)
A ∩ B = ∅	Sucesos incompatibles (no pueden ocurrir simultáneamente)

→ **A** familia de sucesos con estructura de σ -álgebra si

a) $\emptyset \in \mathbf{A}$

b) $A \in \mathbf{A} \Rightarrow A^c \in \mathbf{A}$

c) $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathbf{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbf{A}$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Axiomática de Kolmogorov

Una medida de probabilidad es una aplicación de **A** en $\mathcal{R}$:

$$P: A \in \mathbf{A} \rightarrow P(A) \in \mathcal{R}$$

que verifica los siguientes axiomas:

i) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathbf{A}$

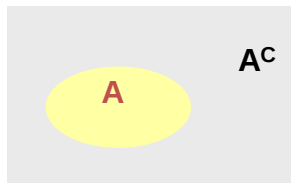
ii) $P(E) = 1$

iii) $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathbf{A}, A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

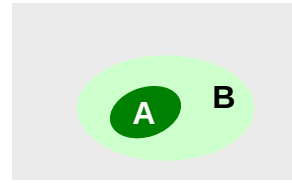
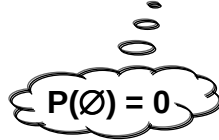


Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

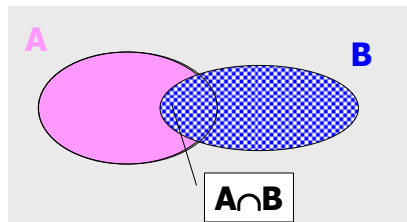
Propiedades derivadas



$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 1: INCERTIDUMBRE Y PROBABILIDAD

1.3.- Probabilidad condicionada e independencia



Probabilidad condicionada

La disponibilidad de información afecta a la asignación de probabilidades

Un trabajador tiene 24 años o menos

¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre en paro?

INFORMACIÓN DISPONIBLE
S "edad del trabajador"

Probabilidad de "estar en paro"
condicionada por el suceso S

La **probabilidad condicionada** por un suceso B ($P(B) > 0$), se define para cada suceso A de $\mathbf{A}$ como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Independencia en probabilidad

¿La probabilidad de ocurrencia de A se ve afectada por la ocurrencia de B?

NO

A es independiente de B

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Condición de independencia

A es independiente de B $\Leftrightarrow$ B es independiente de A



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Ilustración

Encuesta a 100 activos de 2 comunidades autónomas sobre su situación laboral

	Ocupados (O)	Parados (N)
Asturias (A)	27	6
País Vasco (V)	59	8

$$P(A \cap N) = \frac{6}{100} = 0,06$$

Probabilidad conjunta

$$P(N) = \frac{14}{100} = 0,14$$

Probabilidad marginal

$$P(N/A) = \frac{6}{33} = \frac{P(A \cap N)}{P(A)} = \frac{0,06}{0,33} = 0,18$$

$$P(N/V) = \frac{8}{67} = \frac{P(V \cap N)}{P(V)} = \frac{0,08}{0,67} = 0,12$$

Probabilidades condicionadas

¿Independencia?



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA EMPRESA

TEMA 1: INCERTIDUMBRE Y PROBABILIDAD

1.4.- Probabilidad total y teorema de Bayes

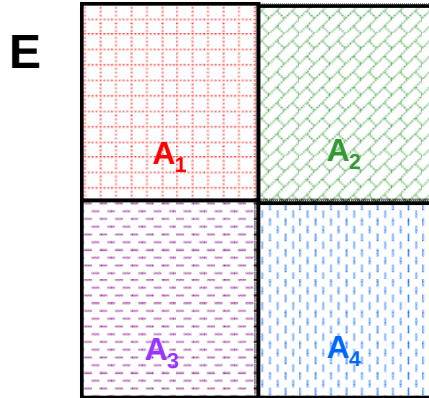


Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Partición o sistema completo de sucesos

Un sistema de sucesos $A_1, \dots, A_n$, forman una partición o sistema completo de sucesos si verifican:

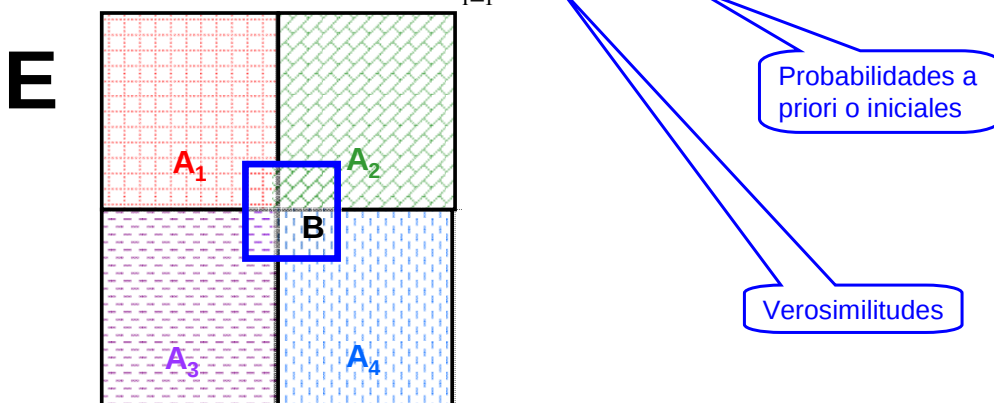
- 1) $P(A_i) > 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$
- 2) $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$
- 3) $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$



Teorema de la probabilidad total

Dado un espacio de probabilidad $(E, \mathbf{A}, P)$ sobre el que se establece una partición $(A_1, \dots, A_n)$, y dado un suceso B de $\mathbf{A}$:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i)P(A_i)$$



Teorema Probabilidad Total. Ilustración

La plantilla de una empresa consta de un 70% de técnicos, un 25% de administrativos y un 5% de directivos. En cada una de estas categorías la proporción de personas que ha comprado acciones (CA) de la empresa asciende al 40%, 30% y 70% respectivamente

Alternativa	Probabilidad a priori	Comprar acciones (CA)
Técnicos (T)	0,70	40%
Administrativos (A)	0,25	30%
Directivos (D)	0,05	70%

Partición

Verosimilitudes

Seleccionado un trabajador al azar, ¿probabilidad de que haya comprado acciones de la empresa?

$$P(CA) = P(CA/T)P(T) + P(CA/A)P(A) + P(CA/D)P(D) = 0,39$$



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Teorema de Bayes

Dada una partición $A_1, \dots, A_n$ de E y otro suceso B tal que $P(B) > 0$, entonces se tiene:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B/A_i)P(A_i)}$$

Probabilidades a posteriori o finales



Universidad de Oviedo. Facultad de Economía y Empresa. Grado en ADE. Métodos Estadísticos para la Empresa

Probabilidades a posteriori. Ilustración

Un trabajador ha comprado acciones de la empresa,
¿probabilidad de que se trate de un directivo?

$$P(D/CA) = \frac{P(CA/D)P(D)}{P(CA)} = \frac{(0,70)(0,05)}{0,39} = 0,09$$

Alternativa	Probabilidad a priori	Probabilidad con compra de acciones
Técnicos (T)	0,7	0,72
Administrativos(A)	0,25	0,19
Directivos (D)	0,05	0,09

Probabilidades a posteriori o finales

