Capítulo 6

Cálculo simbólico con MATLAB

6.1. Introducción

Los cálculos en MATLAB, por defecto, se realizan en formato numérico. Si efectuamos, por ejemplo, operaciones como $1/2+1/5$ o $(\pi^2-1)/(\pi-1)$, nos devuelve los valores aproximados, en vez de los resultados exactos $7/10$ y $\pi+1$, respectivamente.

Por otra parte, hay cálculos que se realizan habitualmente en Matemáticas y que no son posibles con las órdenes de MATLAB estudiadas hasta el momento. Por ejemplo, al efectuar $(a+b)(a-b)$ o $\int(2x)dx$ obtendremos un mensaje de error debido a que las variables a, b, y x no tienen valores asignados.

Para solventar este tipo de problemas, podemos utilizar la herramienta *cálculo simbólico* de MATLAB. A las expresiones sobre las que se realiza el cálculo simbólico se las denomina *expresiones simbólicas* y a las constantes y variables que aparecen en ellas *constantes y variables simbólicas.*

6.2. Construcción de objetos simbólicos

Función	Salida
`syms`	Crea variables simbólicas.
`sym`	Convierte a variable simbólica.
`double`	Convierte a variable numérica.

Para convertir una variable númerica en simbólica se utiliza el comando **sym**:

```
>> a=sym(pi) % Almacena en a la constante simbólica pi
a =
pi
>> n=double(a) % Obtiene el valor numérico de la variable a y lo almacena en n
n =
    3.1416
>> A=[1 1/3;1 sqrt(2)] % A es una matriz de tipo numérico
A =
    1.0000    0.3333
    1.0000    1.4142
```

```
>> B=sym(A) % B es la expresión simbólica de A
B = [ 1,     1/3]
    [ 1, sqrt(2)]
```

Para definir variables simbólicas que no tengan asignados valores concretos, se utiliza el comando **syms**, un espacio en blanco y a continuación las variables simbólicas que queramos construir. Por ejemplo, si escribimos

```
>> syms x y
```

creamos las variables simbólicas x e y, con las que ya podemos operar de forma simbólica:

```
>> 2*x^2-y/7

ans =

2*x^2-1/7*y
```

6.3. Operaciones con funciones simbólicas

Cuando una expresión contiene variables simbólicas, dicha expresión también lo es:

```
>>clear, syms x, f= x^2+2*x+1 % Crea la expresión simbólica f
f =
 x^2+2*x+1
```

También se pude definir una expresión simbólica sin haber declarado previamente como simbólicas las variables que contiene por medio de una cadena de texto, es decir, con los caracteres que la componen escritos entre comillas simples '. Por ejemplo:

```
>> clear, f= 'x^2+2*x+1' % Crea la expresión simbólica f
f =
 x^2+2*x+1
```

De este modo, si queremos, por ejemplo, trabajar con las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(z) = z^2 + 1$ podemos hacerlo creando las expresiones simbólicas correspondientes por cualquiera de los dos métodos:

```
>> clear
>> syms x,f=x^3+1,g='z^2+1'
f =
x^3+1
g =
z^2+1
```

Una vez definidas podemos realizar con ellas las operaciones habituales: calcular su valor en un punto, derivarlas, integrarlas, etc.

Si en una expresión simbólica queremos sustituir una variable por otra o por una constante para calcular su valor en un punto, utilizamos la orden **subs**:

- subs(f, antiguas, nuevas) Sustituye las variables antiguas por las nuevas. Si hay más de una variable las escribiremos entre llaves y separada por comas.

Por ejemplo, para calcular $f(3)$ y $g(1)$ haríamos:

```
>> subs(f,x,3),subs(g,'z',1)
ans =
    28
ans =
     2
```

Nótese que hemos escrito subs(g,'z',1), en vez de subs(g,z,1), puesto que, al no estar declarada z como variable simbólica, al ejecutar esta última orden el programa nos devolvería un mensaje de error indicando que la variable z no existe.

```
    >> subs(g,z,3)
??? Undefined function or variable 'z'.
```

Ejemplo 6.3.1 *Constrúyase $f = ax^2 + bx + c$ y sustitúyase x por t. Para a=2, b=1, c=0, obténgase el valor de f, cuando t=2 y t=[1:4].*

Solución

```
>> syms x a b c
>> f=a*x^2+b*x+c
f =
 a*x^2+b*x+c
>> syms t
>> g=subs(f,x,t) %sustituye en f, x por t
g =
 a*t^2+b*t+c
>> h=subs(g,{a,b,c},{2,1,0})
h =
 2*t^2+t
>> u=subs(h,t,2)
u =
    10
>> v=subs(h,t,[1:4])
v =
     3    10    21    36
```

Para derivar e integrar una expresión simbólica f, disponemos de las instrucciones **diff** e **int**, que actúan como se indica en el siguiente cuadro:

`diff(f)`	Deriva f respecto de la variable simbólica preferente.
`diff(f,u)`	Deriva f respecto a la variable u.
`int(f)`	Calcula una primitiva de f respecto de la variable simbólica preferente.
`int(f,s)`	Calcula una primitiva de f respecto de la variable s.
`int(f,a,b)`	Calcula la integral definida de f respecto de la variable simbólica preferente.
`int(f,s,a,b)`	Calcula la integral definida de f respecto de la variable s.

Nota: Por defecto, la *variable preferente* en una expresión simbólica es la letra x. Si ésta no interviene en la expresión, se toma la letra minúscula más próxima a ella según el orden alfabético y que no sea ni la i ni la j. En caso de que haya dos (una anterior y otra posterior), se considera variable preferente el carácter posterior.

Ejemplo 6.3.2 *Constrúyanse las expresiones simbólicas* $f = ax + b$ *y* $g = y^2 + z$ *y calcúlense:*

1. $\int f dx$
2. $\int f da$
3. $\int g dy$
4. $\int_0^1 g dz$

Solución

```
>> syms a b x;f=a*x+b;g='y^2+z';% practicamos los dos modos de definir expresiones
>> I1=int(f) % integra respecto de la variable preferente x
I1 =
1/2*a*x^2+b*x

>> I2=int(f,a) % integra respecto de a
I2 =
1/2*a^2*x+b*a

>> I3=int(g) % integra respecto de la variable preferente y.Equivale a int(g,'y').
I3 =
1/3*y^3+z*y

>> I4=int(g,'z',0,1) % integra respecto de la variable z.
I4 =
y^2+1/2
```

6.4. Gráficos 2D

6.4.1. El espacio donde se dibuja

Al realizar un gráfico con MATLAB se abre automáticamente una *ventana gráfica* o *figura*. También se puede crear una figura que no contenga ningún gráfico con la orden:

Función	Salida
`figure`	Genera una ventana gráfica.
`figure(n)`	Genera la ventana gráfica número n; si ya existe, la activa.

Para cerrar ventanas gráficas se utilizan las órdenes:

Función	Salida
`close`	Cierra la ventana gráfica activada.
`close(n)`	Cierra la ventana gráfica número n.
`close all`	Cierra todas las ventanas gráficas.

Es posible borrar el contenido de una ventana gráfica sin cerrarla, utilizando la orden:

Función	Salida
`clf`	Borra el contenido de una ventana gráfica activada, manteniéndola abierta.

Cada gráfico se realiza por defecto en una ventana gráfica diferente. En ocasiones interesa superponer varios dibujos en una ventana gráfica, para lo que se hace uso de las órdenes:

Función	Salida
`hold on`	Mantiene activa la ventana gráfica actual.
`hold off`	Cada gráfico se realiza en una ventana diferente. Es la opción por defecto.
`hold`	Intercambia `hold on` y `hold off`.

Órdenes para dibujar

La orden básica para trazar gráficos bidimensionales es **plot**. Su sintaxis es la siguiente:

Función	Salida
`plot(x,y)`	Si x e y son números, dibuja el punto de coordenadas (x,y). Si se trata de los vectores $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, dibuja el conjunto de puntos $\{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$ y los enlaza con segmentos.
`plot(x,y,S)`	Hace lo mismo que `plot(x,y)` pero con las opciones especificadas en `S`. En `S` puede aparecer un símbolo de cada una de las columnas de la siguiente tabla, encerrados entre comillas simples.
`plot(x1,y1,S1,x2,y2,S2,...)`	Dibuja en una misma gráfica, los gráficos definidos por las ternas `(xi,yi,Si)`. Si no se especifican los parámetros `Si`, el dibujo se realiza con trazo continuo y un color distinto para cada gráfica, utilizando los siete primeros colores de la tabla en el orden señalado. Si se necesitan más colores se repiten cíclicamente.

Códigos para `S`:

Color	Marca	Trazo
`b` azul	`.` punto	`-` continuo
`g` verde	`o` círculo	`:` discontinuo
`r` red	`x` aspa	`-.` punto y guión
`c` cyan	`*` asterisco	`--` discontinuo
`m` magenta	`s` cuadrado	
`y` amarillo	`d` rombo	
`k` negro	`v` triángulo (abajo)	
`w` blanco	`^` triángulo (arriba)	
	`<` triángulo (izquierda)	
	`>` triángulo (derecha)	
	`p` estrella 5 puntas	
	`h` estrella 6 puntas	

En `S` no es necesario especificar los tres símbolos, y el orden en el que éstos se escriben es indiferente.

Una figura se puede copiar, imprimir o guardar en un fichero m utilizando las opciones del menú de la ventana gráfica.

Ejemplo 6.4.1 *Dibújense los puntos (1,2), (2,5), (3,-1) con asteriscos de color magenta, pero sin dibujar la línea que los une.*
Solución

```
>> x=[1 2 3];y=[2 5 -1];
>> plot(x,y,'m*')
```

Ejemplo 6.4.2 *Dibújense los puntos mencionados con estrellas azules unidos por una línea verde continua.*
Solución

```
>> x=[1 2 3];y=[2 5 -1];
>> plot(x,y,'p b',x,y,'g-')
```

6.4.2. Gráficos de funciones en coordenadas cartesianas

Para dibujar la gráfica de una función de una variable $y = f(x)$ en el intervalo [a,b] se siguen los siguientes pasos:

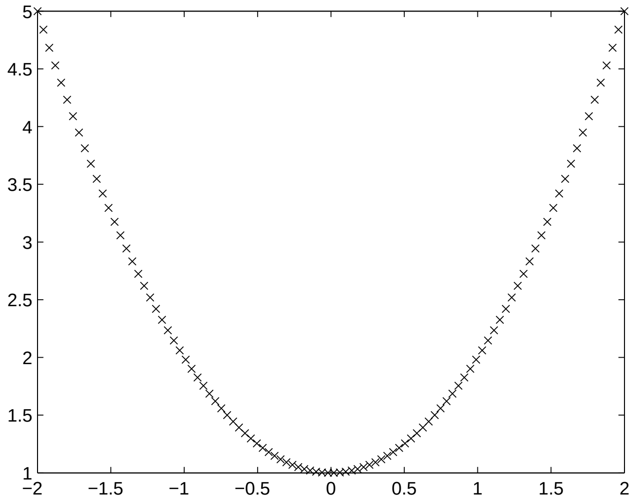
- Se genera un vector $X = (a = x_1, x_2, ..., x_n = b)$ mediante $X = linspace(a, b, n)$, $X = linspace(a, b)$, o bien $X = a : h : b$.
- Se genera el vector $Y = (f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$ escribiendo $Y = f(X)$.
- Con $plot(X, Y)$ se dibuja el conjunto de puntos $\{(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), ..., (x_n, f(x_n))\}$ que constituye la gráfica de f.

Ejemplo 6.4.3 *Dibuja la función $y = 1 + x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$, con un trazo de aspas de color negro.*
Solución

En el fichero **dibujo1.m** escribimos

```
syms x, y=1+x^2
X=linspace(-2,2); Y=subs(y,x,X);
plot(X,Y,'k x')
```

El resultado sería:



MATLAB permite poner textos en un gráfico. Las órdenes son las siguientes:

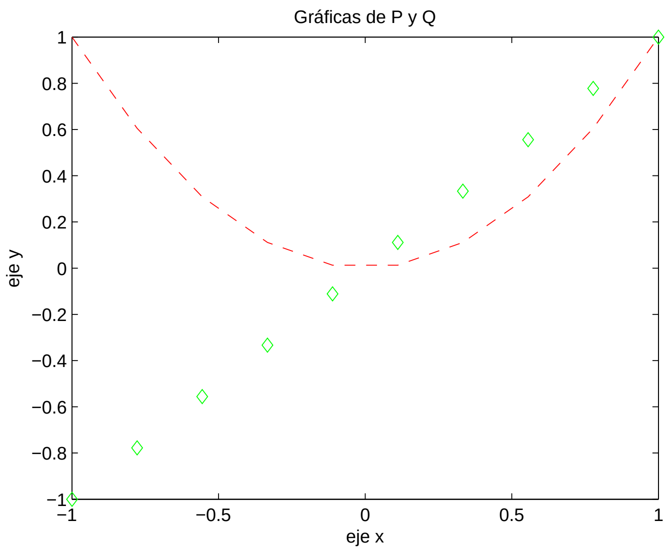
Función	**Salida**
title ('texto')	Sitúa el texto como título del gráfico en la parte superior del mismo, en gráficos 2D
xlabel ('texto')	Sitúa el texto al lado del eje x en gráficos 2D
ylabel ('texto')	Sitúa el texto al lado del eje y en gráficos 2D
text (x,y,'texto')	Sitúa el texto en el punto (x, y) en un gráfico 2D
gtext ('texto')	Permite situar el texto en un punto seleccionado con el ratón en un gráfico 2D

Ejemplo 6.4.4 *Dibuja sobre una misma gráfica las funciones $P(x) = x^2$ y $Q(x) = x$ en el intervalo $[-1, 1]$. La primera con un trazo discontinuo de color rojo y la segunda con un trazo de rombos de color verde. Se han puesto también etiquetas a los ejes, y título a la figura.*

Solución

En el fichero **dibujo2.m** escribimos

```
syms x ; P=x^2;
Xnum=linspace(-1,1,10);
P1=subs(P,x,Xnum);
plot(Xnum,P1,'r--')
hold on
Q=x;Q1= subs(Q,x,Xnum);
plot(Xnum,Q1,'g d')
xlabel('eje x')
ylabel('eje y')
title('Gráficas de P y Q')
```

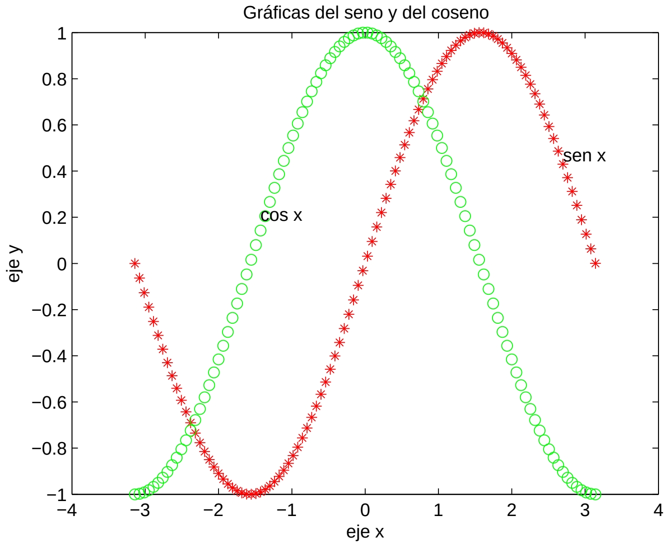


Ejemplo 6.4.5 *Dibuja sobre una misma gráfica las funciones* $y_1 = senx$ *e* $y_2 = \cos x$ *en el intervalo* $[-\pi, \pi]$, *la primera con un trazo de asteriscos de color rojo y la segunda con un trazo de círculos de color verde. Se han puesto también etiquetas a los ejes, se ha colocado un texto a cada una de las funciones y, por último, se ha puesto título a la figura.*
Solución

En el fichero **dibujo3.m** escribimos

```
x=linspace(-pi,pi); y1=sin(x); y2=cos(x);
plot(x,y1,'r *',x,y2,'g o')
xlabel('eje x')
ylabel('eje y')
gtext('sen x')
gtext('cos x')
title('Gráficas del seno y del coseno')
```

El resultado sería:



Ejercicio 6.1 *Dado el sistema:*

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} & 3y & -6z & +6t & +4w & = & -5 \\ 3x & -7y & +8z & -5t & +8w & = & 9 \\ 3x & -9y & +12z & -9t & +6w & = & 15 \end{array}\right.$$

1. *Pruebe que el sistema es compatible indeterminado.*

2. *Cálculese la escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema.*

3. *Utilizando el apartado anterior, dedúzcanse las expresiones simbólicas correspondientes a las ecuaciones paramétricas del conjunto de soluciones del sistema.*

4. *Utilizando el apartado anterior y la orden* **subs** *para dar valores a los parámetros libres, obténgase una solución particular.*

5. *Calcule un conjunto de vectores que permita determinar las soluciones del sistema homogéneo asociado.*

6. *Teniendo en cuenta los dos apartados anteriores, escríbase la expresión simbólica que permite expresar la solución general del sistema como suma de una solución particular del mismo más la solución general del sistema homogéneo.*

Ejercicio 6.2

1. *Constrúyase la matriz simbólica*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & x^4 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \end{pmatrix}$$

utilizando el producto de dos vectores cuyas coordenadas sean las adecuadas potencias de x.

2. *Calcúlese una nueva matriz A, cuyos elementos sean las integrales definidas de los elementos de M entre -1 y 1.*

3. *Resuélvase el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es A y cuyo vector de términos independientes es el que tiene por elementos las integrales definidas entre -1 y 1 de los elementos de*

$$\big(sen(\pi x), xsen(\pi x), x^2 sen(\pi x), x^3 sen(\pi x)\big)$$

   Denótese por s al vector columna que es la solución única obtenida.

4. *Constrúyase el polinomio P, de tercer grado, cuyos coeficientes son las coordenadas del vector solución, esto es, $P(x) = s(1) + s(2)x + s(3)x^2 + s(4)x^3$.*

5. *Dibuja en una misma gráfica las funciones $y = sen(\pi x)$ y $P(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$, la primera con un trazo de asteriscos de color verde y la segunda con una línea continua de color azul.*