

EXAMEN DE CÁLCULO. TERCER CONTROL

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 14-01-2013

1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2^n}$

- a) converge a $3/5$; **b) no converge** ; c) converge a $-3/5$; d) converge a 0

(1p.)

2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$

- a) converge a 0 ; b) converge a $1/12$; **c) converge a $1/3$** ; d) no converge

(1p.)

3) Si $f(x, y)$ es una función de dos variables tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0 + m(x - x_0)) = m$ entonces:

- a) no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$; **b) no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$**

- c) si existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ vale m ; d) si existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ vale m

(1p.)

4) a) Definir cuando una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) Enunciar el criterio de Leibniz para series alternadas

(1p.)

Solución.

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *convergente* si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es convergente, siendo

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

b) Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona decreciente de números no negativos, es decir, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$ y, además, convergente a cero. Se verifica que la serie alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

es convergente.

5) Estudiar el carácter de las siguientes series:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right)$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^3 \sqrt{n} + 2}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)}$

(2.5 p.)

Solución.

a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}+1}{n-1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} \right) = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente a $+\infty$ ya que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ lo es

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^3 \sqrt{n} + 2}$$

Aplicamos el criterio de comparación en el límite con la serie armónica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ que es convergente si $\alpha > 1$ y es divergente si $\alpha \leq 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3}{n^3 \sqrt{n} + 2}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3+\alpha}}{n^{7/2} + 2} = 1 \quad \text{si} \quad \alpha + 3 = 7/2, \text{ es decir, si } \alpha = 1/2$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ es divergente; por tanto, la serie dada tiene el mismo carácter, es decir, es divergente.

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)}$$

Aplicamos el criterio del cociente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)(3n+2)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)(3n+4)} \cdot \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{3n+4} = 1$$

El criterio del cociente no decide. Aplicamos el criterio de Raabe.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{3n+2}{3n+4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+4} = \frac{2}{3} < 1 \quad ; \text{ por tanto la serie es divergente}$$

6) Calcular, si existen, los límites dobles en el $(0, 0)$ de las dos siguientes funciones. En ambos casos se ha de comenzar calculando los límites direccionales a través de rectas y, si es necesario, se ha de calcular también algún límite direccional a través de una curva.

a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + 4 - 2}$; b) $f(x, y) = \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$

(2.5p.)

Solución.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + m^2 x^2}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2 + 4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + m^2 x^2)(\sqrt{x^2 + m^2 x^2 + 4} + 2)}{x^2 + m^2 x^2 + 4 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + m^2 x^2 + 4} + 2 = \sqrt{4} + 2 = 4 \end{aligned}$$

Por tanto, el límite doble en el $(0, 0)$, si existe, vale 4. Probemos con alguna curva

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x)(\sqrt{x^2 + x + 4} + 2)}{x^2 + x + 4 - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + x + 4} + 2 = 4 \\ y^2 &= x \end{aligned}$$

Intentemos demostrar que el límite es 4

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} - 4 &= \frac{r^2 \cos^2(\alpha) + r^2 \sin^2(\alpha)}{\sqrt{r^2 \cos^2(\alpha) + r^2 \sin^2(\alpha) + 4} - 2} - 4 = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + 4} - 2} - 4 = \\ &= h(r) \cdot g(\alpha) \quad \text{siendo} \quad h(r) = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + 4} - 2} - 4 \quad \text{y} \quad g(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + 4} - 2} - 4 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\sqrt{r^2 + 4} + 2)}{r^2 + 4 - 4} - 4 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r^2 + 4} + 2 - 4 = 0$$

g es acotada trivialmente

Efectivamente, el límite doble en el $(0, 0)$ es igual a 4.

$$\text{b) } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xm^4 x^4}{x^2 + m^8 x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^4 x^3}{1 + m^8 x^6} = 0$$

Por tanto, el límite doble en el $(0, 0)$, si existe, vale 0. Probemos con alguna curva

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 y^4}{y^4 + y^8} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{1 + y^4} = 0 \\ x &= y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4 y^4}{y^8 + y^8} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^8}{2y^8} = \frac{1}{2} \\ x &= y^4 \end{aligned}$$

Concluimos que el límite doble en el $(0, 0)$ no existe ya que no todos los límites direccionales son iguales.

7) Obtener los puntos críticos de la función $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{27}{y}$ pertenecientes a su dominio.

(1p.)

Solución.

$$\text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$$

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y - \frac{1}{x^2} = x - \frac{27}{y^2} = 0$$

Despejamos "y" en una ecuación y "x" en la otra: $y = \frac{1}{x^2}$ [1] , $x = \frac{27}{y^2}$ [2]

Sustituimos [1] en [2] : $x = 27x^4$; por tanto: $x^3 = \frac{1}{27}$, es decir, $x = \frac{1}{3}$

Sustituimos $x = \frac{1}{3}$ en [1] y resulta $y = 9$

El único punto crítico de f es $\left(\frac{1}{3}, 9\right)$