

EXAMEN DE CÁLCULO. SEGUNDO CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 30-11-2012^(9-10.30)

1) Si $F(x) = \int_0^{x^4} \frac{t}{t^3+1} dt$ entonces $F'(-1)$ es igual a:

- a) -1 ; b) 1 ; **c) -2** ; d) 2

(1p.)

2) La integral indefinida de $\frac{x-1}{x^2-2x+2}$ es:

- a) $\frac{1}{2} \log(x^2 - 2x + 2) + C$** ; b) $2 \log(x^2 - 2x + 2) + C$
 b) $\arctg(x^2 - 2x + 2) + C$; d) $\arctg(x - 1) + C$

(1p.)

3) La sucesión $\{a_n\} = (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^4 + n + 1}}{2n - 1}$ es:

- a) convergente ; b) divergente con límite ; **c) divergente sin límite** ; d) oscilante

(1p.)

4)

a) Definir la función Gamma de Euler $\Gamma(p)$, $p > 0$.

b) Definir, usando lenguaje matemático, cuando una sucesión $\{a_n\}$ de n° reales es divergente.

(1p.)

Solución.

a)

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0$$

b) $\{a_n\}$ es divergente si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$

5) Obtener una primitiva de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

(1.5p.)

Solución.

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2 - 4} \right) dx = x + 4 \int \frac{1}{x^2 - 4} dx$$

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} \quad ; \quad A(x + 2) + B(x - 2) = 1$$

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow A = 1/4 \quad ; \quad \text{Si } x = -2 \Rightarrow B = -1/4$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-4} dx = x + \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+2} dx = x + \log|x-2| - \log|x+2| + C$$

Una primitiva es $x + \log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

6) Calcular el área determinada por la curva $y = \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}$, las rectas $x = -\sqrt{3}$ y $x = 0$ y el eje de abscisas. Explicar el planteamiento y usar la fórmula del cambio de variable en la integral definida.

$$\operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2 \quad ; \quad \operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad ; \quad \operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \quad ; \quad \cos(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(2.5p.)

Solución.

Sea $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}$; en el intervalo $[-\sqrt{3}, 0]$ se verifica que $f(x) \leq 0$. Por tanto, el área es:

$$A = - \int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Teniendo en cuenta que f es impar, sabemos que $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx = 0$, es decir,

$$A = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

cambio de variable : $x = 2\operatorname{sen}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

$$0 = 2\operatorname{sen}(\alpha) \quad ; \quad \alpha = 0$$

$$\sqrt{3} = 2\operatorname{sen}(\beta) \quad ; \quad \beta = \pi/3$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/3} \frac{8\operatorname{sen}^3(t)}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(t)}} 2\cos(t) dt = 8 \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^3(t)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}} \cos(t) dt = 8 \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^3(t) dt = \\ &= 8 \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}(t)(1-\cos^2(t)) dt = 8 \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}(t) dt - 8 \int_0^{\pi/3} \cos^2(t) \operatorname{sen}(t) dt = \\ &= -8\cos(t) \Big|_0^{\pi/3} + \frac{8}{3} \cos^3(t) \Big|_0^{\pi/3} = -8\frac{1}{2} + 8 + \frac{8}{3} \frac{1}{8} - \frac{8}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

7) Usar el teorema de la sucesión intermedia para calcular, de manera razonada, el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \frac{n^2}{2n^3+1} + \frac{n^2}{2n^3+2} + \dots + \frac{n^2}{2n^3+n^2}$$

(2p.)

Solución.

$$2n^3+1 < 2n^3+2 < \dots < 2n^3+n^2 \Rightarrow \frac{1}{2n^3+1} > \frac{1}{2n^3+2} > \dots > \frac{1}{2n^3+n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{2n^3+1} > \frac{n^2}{2n^3+2} > \dots > \frac{n^2}{2n^3+n^2} \Rightarrow n^2 \frac{n^2}{2n^3+n^2} \leq a_n \leq n^2 \frac{n^2}{2n^3+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{2n^3+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{2n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^4}} = +\infty$$

Por el teorema de la sucesión intermedia resulta que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

EXAMEN DE CÁLCULO. SEGUNDO CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 30-11-2012. (11-12.30)

1) Si $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{t}{t^3+1} dt$ entonces $F'(-1)$ es igual a:

- a) 1 ; **b) -1** ; c) 2 ; d) -2

(1p.)

2) La integral indefinida de $\frac{3x^2}{1+x^6}$ es:

- a) $\arctg(1+x^6)+C$; b) $\log(1+x^6)+C$; c) $\arctg(x^6)+C$; **d) $\arctg(x^3)+C$**

(1p.)

3) La sucesión $\{a_n\} = (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{2n-1}$ es:

- a) convergente** ; b) divergente con límite ; c) divergente sin límite ; d) oscilante

(1p.)

4)

a) Sea $f(x)$ una función continua $\forall x \geq a$ ¿Cuándo se dice que la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente?

b) Definir, usando lenguaje matemático, cuando una sucesión $\{a_n\}$ de n° reales es acotada inferiormente.

(1p.)

Solución.

a)

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente si $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ existe y es finito

b) $\{a_n\}$ es acotada inferiormente $\Leftrightarrow : \exists m \in \mathbb{R} / a_n \geq m \quad \forall n$

5) Obtener una primitiva de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-9}$

(1.5p.)

Solución.

Método corto:

$$\int \frac{x^3}{x^2-9} dx = \int \left(x + \frac{9x}{x^2-9} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 9 \int \frac{x}{x^2-9} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \int \frac{2x}{x^2-9} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \log|x^2-9| + C$$

Método largo:

$$\int \frac{x^3}{x^2-9} dx = \int \left(x + \frac{9x}{x^2-9} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 9 \int \frac{x}{x^2-9} dx$$

$$\frac{x}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \quad ; \quad A(x+3) + B(x-3) = x$$

$$\text{Si } x=3 \Rightarrow A=1/2 \quad ; \quad \text{Si } x=-3 \Rightarrow B=1/2$$

$$\int \frac{x^3}{x^2-9} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \int \frac{1}{x-3} dx + \frac{9}{2} \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \log|x-3| + \frac{9}{2} \log|x+3| + C$$

$$\text{Una primitiva es } \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \log|x^2-9|$$

- 6) Calcular el área determinada por la curva $y = \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$, las rectas $x = -2\sqrt{3}$ y $x = 0$ y el eje de abscisas. Explicar el planteamiento y usar la fórmula del cambio de variable en la integral definida.

$$\text{sen}(\pi/6) = 1/2 \quad ; \quad \text{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad ; \quad \text{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \quad ; \quad \cos(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(2.5p.)

Solución.

Sea $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$; en el intervalo $[-2\sqrt{3}, 0]$ se verifica que $f(x) \geq 0$. Por tanto, el área es:

$$A = \int_{-2\sqrt{3}}^0 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$$

Teniendo en cuenta que f es par, sabemos que $\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx = 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$, es decir,

$$A = \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$$

cambio de variable : $x = 4\text{sen}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

$$0 = 4\text{sen}(\alpha) \quad ; \quad \alpha = 0$$

$$2\sqrt{3} = 4\text{sen}(\beta) \quad ; \quad \beta = \pi/3$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/3} \frac{16\sin^2(t)}{\sqrt{16-16\sin^2(t)}} 4\cos(t)dt = 16 \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos(t)dt = 16 \int_0^{\pi/3} \sin^2(t)dt = \\
&= 16 \int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = 8 \int_0^{\pi/3} dt - 8 \int_0^{\pi/3} \cos(2t)dt = 8t \Big|_0^{\pi/3} - 4 \sin(2t) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

7) Usar el teorema de la sucesión intermedia para calcular, de manera razonada, el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \frac{n^2}{2n^3+1} + \frac{n^2}{2n^3+2} + \dots + \frac{n^2}{2n^3+n+1}$$

(2p.)

Solución.

$$2n^3+1 < 2n^3+2 < \dots < 2n^3+n+1 \Rightarrow \frac{1}{2n^3+1} > \frac{1}{2n^3+2} > \dots > \frac{1}{2n^3+n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{2n^3+1} > \frac{n^2}{2n^3+2} > \dots > \frac{n^2}{2n^3+n+1} \Rightarrow (n+1)\frac{n^2}{2n^3+n+1} \leq a_n \leq (n+1)\frac{n^2}{2n^3+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n^2}{2n^3+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n^2}{2n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2}$$

Por el teorema de la sucesión intermedia resulta que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

EXAMEN DE CÁLCULO. SEGUNDO CONTROL
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 30-11-2012. (12.30-14)

1) La integral indefinida de $\frac{3x^2}{1+x^6}$ es:

- a) $\log(1+x^6)+C$; b) $\arctg(1+x^6)+C$; **c)** $\arctg(x^3)+C$; d) $\arctg(x^6)+C$ (1p.)

2) Si $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{t}{t^3+1} dt$ entonces $F'(-1)$ es igual a:

- a)** -1 ; b) 1 ; c) -2 ; d) 2 (1p.)

3) La sucesión $\{a_n\} = (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{2n-1}$ es:

- a) oscilante ; b) divergente sin límite ; c) divergente con límite ; **d)** convergente (1p.)

4)

a) Sea $f(x)$ una función continua $\forall x \geq a$ ¿Cuándo se dice que la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente?

b) Definir, usando lenguaje matemático, cuando una sucesión $\{a_n\}$ de n° reales es acotada inferiormente.

(1p.)

Solución.

a)

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente si $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ existe y es finito

b) $\{a_n\}$ es acotada inferiormente $\Leftrightarrow : \exists m \in \mathbb{R} / a_n \geq m \quad \forall n$

5) Obtener una primitiva de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-9}$

(1.5p.)

Solución.

Método corto:

$$\int \frac{x^3}{x^2-9} dx = \int \left(x + \frac{9x}{x^2-9} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 9 \int \frac{x}{x^2-9} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \int \frac{2x}{x^2-9} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \log|x^2-9| + C$$

Método largo:

$$\int \frac{x^3}{x^2-9} dx = \int \left(x + \frac{9x}{x^2-9} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 9 \int \frac{x}{x^2-9} dx$$

$$\frac{x}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \quad ; \quad A(x+3) + B(x-3) = x$$

$$\text{Si } x=3 \Rightarrow A=1/2 \quad ; \quad \text{Si } x=-3 \Rightarrow B=1/2$$

$$\int \frac{x^3}{x^2-9} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \int \frac{1}{x-3} dx + \frac{9}{2} \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \log|x-3| + \frac{9}{2} \log|x+3| + C$$

$$\text{Una primitiva es } \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \log|x^2-9|$$

6) Calcular el área determinada por la curva $y = \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$, las rectas $x = -2\sqrt{3}$ y $x = 0$ y el eje de abscisas. Explicar el planteamiento y usar la fórmula del cambio de variable en la integral definida.

$$\text{sen}(\pi/6) = 1/2 \quad ; \quad \text{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad ; \quad \text{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \quad ; \quad \cos(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(2.5p.)

Solución.

Sea $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}$; en el intervalo $[-2\sqrt{3}, 0]$ se verifica que $f(x) \geq 0$. Por tanto, el área es:

$$A = \int_{-2\sqrt{3}}^0 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$$

Teniendo en cuenta que f es par, sabemos que $\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx = 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$, es decir,

$$A = \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$$

cambio de variable : $x = 4\text{sen}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

$$0 = 4\text{sen}(\alpha) \quad ; \quad \alpha = 0$$

$$2\sqrt{3} = 4\text{sen}(\beta) \quad ; \quad \beta = \pi/3$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\pi/3} \frac{16\sin^2(t)}{\sqrt{16-16\sin^2(t)}} 4\cos(t)dt = 16 \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos(t)dt = 16 \int_0^{\pi/3} \sin^2(t)dt = \\
 &= 16 \int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = 8 \int_0^{\pi/3} dt - 8 \int_0^{\pi/3} \cos(2t)dt = 8t \Big|_0^{\pi/3} - 4 \sin(2t) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

7) Usar el teorema de la sucesión intermedia para calcular, de manera razonada, el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \frac{n^2}{2n^3+1} + \frac{n^2}{2n^3+2} + \dots + \frac{n^2}{2n^3+n+1}$$

(2p.)

Solución.

$$\begin{aligned}
 2n^3+1 < 2n^3+2 < \dots < 2n^3+n+1 &\Rightarrow \frac{1}{2n^3+1} > \frac{1}{2n^3+2} > \dots > \frac{1}{2n^3+n+1} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{n^2}{2n^3+1} > \frac{n^2}{2n^3+2} > \dots > \frac{n^2}{2n^3+n+1} &\Rightarrow (n+1)\frac{n^2}{2n^3+n+1} \leq a_n \leq (n+1)\frac{n^2}{2n^3+1}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n^2}{2n^3+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n^2}{2n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2}$$

Por el teorema de la sucesión intermedia resulta que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

