

EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 26-10-2012

1) Si $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in [0, 1]$

a) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$, $x \in [0, 1]$; b) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}$, $x \in [0, 1]$

c) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$, $x \in [-1, 0]$; d) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}$, $x \in [-1, 0]$

(1p.)

2) Si $f(x) = \sin(x)$ y g es una función tal que $g(0) = \pi/2$ y $g'(0) = -1$

a) $(f \circ g)'(0) = 0$; b) $(f \circ g)'(0) = -1$

c) $(f \circ g)'(0) = 1$; d) $(f \circ g)'(0) = -\pi/2$

(1p.)

3) El mínimo absoluto de $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ en el intervalo $[-1, 1]$ se alcanza en:

a) un punto $x \in (-1, 1)$; b) $x = -1$; c) $x = 1$; d) No existe el mínimo

(1p.)

4) Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange.

(1p.)

Solución.

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$

tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

5) ¿Cuáles son los valores de $z \in \mathbb{R}$ que satisfacen la desigualdad $|z - 1| \geq 1$? Usar, necesariamente, la

respuesta dada para obtener los $x \in \mathbb{R}$ tales que $\left| \frac{x-1}{x^2+1} - 1 \right| \geq 1$

(2p.)

Solución.

$$|z - 1| \geq 1 \Leftrightarrow z \leq 0 \text{ ó } z \geq 2$$

$$\left| \frac{x-1}{x^2+1} - 1 \right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2+1} \leq 0 \text{ ó } \frac{x-1}{x^2+1} \geq 2 \Leftrightarrow x-1 \leq 0 \text{ ó } x-1 \geq 2x^2+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ó } 2x^2 - x + 3 \leq 0$$

La ecuación $2x^2 - x + 3 = 0$ no tiene soluciones reales; por tanto, $2x^2 - x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ó $2x^2 - x + 3 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. En este caso, $2x^2 - x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, es decir, la ecuación $2x^2 - x + 3 \leq 0$ no se verifica para ningún valor de x

Así pues, $\left| \frac{x-1}{x^2+1} - 1 \right| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$

6) Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{2tg^2(x)}$$

- a) Usando infinitésimos equivalente sin aplicar la regla de L'Hopital.
b) Por la regla de L'Hopital sin usar infinitésimos equivalentes.

(0.5p.+1.5p.)

Solución.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{2tg^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{2tg^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{4tg(x)(1+tg^2(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}}{4(1+tg^2(x))+12tg^2(x)(1+tg^2(x))} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

7) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Aplicar la definición de derivada lateral para estudiar si f es derivable por la izquierda en $x = 1$.
¿Es f derivable en $x = 1$? Razónese la respuesta y escribir la función derivada de f donde exista.
b) ¿Tiene la función f un extremo local en $x = 1$? ¿Cuántos extremos locales tiene f ? Razónese.

(1.25p.+0.75p.)

Solución.

a)

$$f \text{ es derivable por la izquierda en } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ existe y es finito}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h + 2 = 2$$

Así pues, f es derivable por la izquierda en $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^{-1} \neq f(1) \Rightarrow f$ no es continua por la derecha en $x = 1 \Rightarrow f$ no es derivable por la derecha en $x = 1 \Rightarrow f$ no es derivable en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ -e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Los puntos críticos de f son $x = 1$ ya que no existe $f'(1)$ y $x = 0$ ya que $f'(0) = 0$

Si $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) = 2x < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$

Si $x \in (0, 1) \Rightarrow f'(x) = 2x > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(0, 1)$

Si $x \in (1, \infty) \Rightarrow f'(x) = -e^{-x} < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(1, \infty)$

En $x = 1$ f no es continua; por tanto no es aplicable el criterio de la derivada primera.

$f(1) = 0$; si $x \approx 1$ por la izda $f(x) = x^2 - 1 < 0$; si $x \approx 1$ por la dcha $f(x) = e^{-x} > 0$

Por tanto, f no tiene un extremo local en $x = 1$ (ni máximo ni mínimo).

En $x = 0$ se puede aplicar el criterio de la derivada primera; al pasar de decreciente a creciente, resulta que en $x = 0$ f tiene un mínimo local. Así pues, f tiene un único extremo local.