

EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 26-10-2012

1) Si $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in [1, 2]$

a) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$, $x \in [1, 2]$; b) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}$, $x \in [1, 2]$

c) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$, $x \in [-1, 0]$; d) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}$, $x \in [-1, 0]$

(1p.)

2) Si f es derivable en R tal que $f(0) = 5$ y $f(1) = 6$, entonces necesariamente:

a) $f'(c) = 0$ para algún $c \in (0, 1)$; **b)** $f'(c) = 1$ para algún $c \in (0, 1)$

c) $f'(c) = -1$ para algún $c \in (0, 1)$; d) $f(c) = 1$ para algún $c \in (0, 1)$

(1p.)

3) El mínimo absoluto de $f(x) = \sin(x) - 2x$ en el intervalo $[0, 1]$ se alcanza en:

a) un punto $x \in (0, 1)$; b) $x = 0$; **c)** $x = 1$; d) No existe el máximo

(1p.)

4) Completar el siguiente enunciado (regla de la cadena):

Si g es derivable en c y f es derivable en $g(c)$ se verifica que $f \circ g$ es derivable en c y

además $(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c)$

(1p.)

5) ¿Cuáles son los valores de $z \in R$ que satisfacen la desigualdad $|z - 1| \leq 1$? Usar la respuesta dada

para obtener los $x \in R$ tales que $\left| \frac{x-1}{x^2+1} - 1 \right| \leq 1$

(2p.)

Solución.

$$|z - 1| \leq 1 \Leftrightarrow z \in [0, 2], \text{ es decir, } 0 \leq z \leq 2$$

$$\left| \frac{x-1}{x^2+1} - 1 \right| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x-1}{x^2+1} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x-1 \leq 2x^2+2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2x^2+3 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ y } 2x^2-x+3 \geq 0$$

La ecuación $2x^2 - x + 3 = 0$ no tiene soluciones reales; por tanto, $2x^2 - x + 3 > 0 \quad \forall x \in R$ ó $2x^2 - x + 3 < 0 \quad \forall x \in R$. En este caso, $2x^2 - x + 3 > 0 \quad \forall x \in R$, es decir, la ecuación $2x^2 - x + 3 \geq 0$ se verifica para todos los valores reales de x .

$$\text{Así pues, } \left| \frac{x-1}{x^2+1} - 1 \right| \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$$

6) Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \log(1+x)}{\operatorname{tg}(x^2)}$$

- a) Usando infinitésimos equivalente sin aplicar la regla de L'Hopital.
 b) Por la regla de L'Hopital sin usar infinitésimos equivalentes.

(0.5p.+1.5p.)

Solución.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \log(1+x)}{\operatorname{tg}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \log(1+x)}{\operatorname{tg}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) + \frac{x}{1+x}}{2x(1+\operatorname{tg}^2(x^2))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{2(1+\operatorname{tg}^2(x^2)) + 8x^2 \operatorname{tg}(x^2)(1+\operatorname{tg}^2(x^2))} = \frac{2}{2} = 1$$

$$7) \text{ Sea } f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ e^x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Aplicar la definición de derivada lateral para estudiar si f es derivable por la izquierda en $x = 1$.
 ¿Es f derivable en $x = 1$? Razónese la respuesta y escribir la función derivada de f donde exista.
 b) ¿Tiene la función f un extremo local en $x = 1$? ¿Cuántos extremos locales tiene f ? Razónese.

(1.25p.+0.75p.)

Solución.

a)

$$f \text{ es derivable por la izquierda en } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ existe y es finito}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - (1+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -h - 2 = -2$$

Así pues, f es derivable por la izquierda en $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^x - 3 = e - 3 \neq f(1) \Rightarrow f$ no es continua por la derecha en $x = 1 \Rightarrow f$ no es derivable por la derecha en $x = 1 \Rightarrow f$ no es derivable en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- b) Los puntos críticos de f son $x = 1$ ya que no existe $f'(1)$ y $x = 0$ ya que $f'(0) = 0$

Si $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) = -2x > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$

Si $x \in (0, 1) \Rightarrow f'(x) = -2x < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(0, 1)$

Si $x \in (1, \infty) \Rightarrow f'(x) = e^x > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(1, \infty)$

En $x = 1$ f no es continua; por tanto no es aplicable el criterio de la derivada primera.

$f(1) = 0$; si $x \approx 1$ por la izda $f(x) = 1 - x^2 > 0$; si $x \approx 1$ por la dcha $f(x) = e^x - 3 < 0$

Por tanto, f no tiene un extremo local en $x = 1$ (ni máximo ni mínimo).

En $x = 0$ se puede aplicar el criterio de la derivada primera; al pasar de creciente a decreciente, resulta que en $x = 0$ f tiene un máximo local. Así pues, f tiene un único extremo local.
