

EXAMEN DE CÁLCULO. GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 29-06-2012

- 1) Hallar el dominio de $g(x) = \log(x^2 + x - 2)$ y sus asíntotas verticales (por la izquierda y/o por la derecha) ¿tiene g asíntotas horizontales? Razonar las respuestas.

(1p.)

Solución.

$$\begin{aligned} \text{Dom } g &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x+2) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x > 1 \text{ ó } x < -2\} = \\ &= (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

(0.4p.)

No tiene sentido calcular el límite en $x = -2$ por la derecha ni el límite en $x = 1$ por la izquierda.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \log((-3) \cdot 0^-) = \log(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \log(0^+ \cdot 3) = \log(0^+) = -\infty$$

$x = -2$ es una asíntota vertical por la izquierda y $x = 1$ es una asíntota vertical por la derecha.

(0.4p.)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \log(+\infty) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \log(+\infty) = +\infty$$

No tiene asíntotas horizontales

(0.2p.)

- 2) Definir derivadas laterales de una función f en un punto c . Aplicar la definición para estudiar si

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ e^{-x} - x - 1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

es derivable por la izquierda en $c = -1$.

(1.25p.)

Solución.

f es derivable por la derecha en c si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

f es derivable por la izquierda en c si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

(0.25p.)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{-(-1+h)} - (-1+h) - 1 - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{1-h} - h - e}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-e^{1-h} - 1}{1} = -e - 1 \end{aligned}$$

Por tanto, f es derivable por la izquierda en $c = -1$

(1p.)

3)

a) Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange. ¿Se puede obtener el teorema de Rolle a partir del teorema del valor medio? Justificar la respuesta.

(0.5p.)

b) Sea $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} + 1$. ¿Cuántos extremos relativos tiene f en su dominio? Obtener el máximo y el mínimo absoluto de f en el intervalo $[-1, 1]$?

(1p.)

Solución.

a)

El teorema del valor medio de Lagrange dice: Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

El teorema de Rolle se puede obtener a partir del anterior. En el caso particular de que $f(a) = f(b)$ se verifica que existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. Además es continua y derivable $\forall x \in \mathbb{R}$; por tanto los únicos puntos críticos de f serán aquellos puntos donde su derivada primera se anula.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2xx^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$x = 0$ es un punto crítico donde la función es continua.

$$\text{Si } x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad ; \quad \text{Si } x \in (0, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Así pues f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y consecuentemente no tiene extremos relativos.

(0.6p.)

Sabemos que toda función continua definida en un intervalo cerrado alcanza el máximo y el mínimo absoluto en algún punto del intervalo. En nuestro caso, sabemos que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y por tanto también lo es en el intervalo $[-1, 1]$; así pues, el mínimo absoluto se alcanza en $x = -1$ y el máximo absoluto en $x = 1$. No es necesario, en este caso, evaluar la función en el punto crítico $x = 0$.

$$\min_{x \in [-1, 1]} f(x) = f(-1) = 1/2 \quad ; \quad \max_{x \in [-1, 1]} f(x) = f(1) = 3/2$$

(0.4p.)

4) Calcular $\int \frac{dx}{x(x-1)}$

(0.75p.)

Solución.

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \quad ; \quad A(x-1) + Bx = 1 \quad ; \quad B = 1, \quad A = -1$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int -\frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -\log(|x|) + \log(|x-1|) + C = \log\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right) + C$$

- 5) Calcular el área determinada por la curva $y = \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}$, las rectas $x=0$ y $x=2$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

(1.5p.)

$$\sin(\pi/6) = 1/2 \quad ; \quad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad ; \quad \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2} \quad ; \quad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Solución.

Hacemos el cambio de variable: $x = 4\sin(t)$, $t \in [0, \pi/6]$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{4^3 \sin^3(t)}{\sqrt{16-16\sin^2(t)}} 4\cos(t) dt = 64 \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^3(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos(t) dt = \\ &= 64 \int_0^{\pi/6} \sin^3(t) dt = 64 \int_0^{\pi/6} \sin(t)(1-\cos^2(t)) dt = 64 \int_0^{\pi/6} \sin(t) dt - 64 \int_0^{\pi/6} \sin(t)\cos^2(t) dt = \\ &= -64\cos(t)\Big|_0^{\pi/6} + \frac{64}{3}\cos^3(t)\Big|_0^{\pi/6} = -64\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right) + \frac{64}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}-1\right) = \frac{128}{3} - 24\sqrt{3} \end{aligned}$$

6)

- a) Definir cuando una sucesión $\{a_n\}$ de números reales es acotada inferiormente y cuando es divergente.

(0.5p.)

- b) Razonar si la sucesión $\{a_n\} = (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{2n-1}$ es convergente, divergente u oscilante.

(0.75p.)

Solución.

a)

$\{a_n\}$ es acotada inferiormente $\Leftrightarrow : \exists m \in \mathbb{R} / a_n \geq m \quad \forall n$

$\{a_n\}$ es *divergente* $\Leftrightarrow : \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{0}{2} = 0$$

$(-1)^n$ es una sucesión acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1. Sabemos que el producto de una sucesión acotada por otra convergente a cero da como resultado una sucesión convergente a cero. Así pues, $\{a_n\}$ es convergente.

- 7) ¿Para qué valores de a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ es convergente? Justificar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n$ es convergente y obtener su suma. (0.75p.)

Solución.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \text{ es convergente } \Leftrightarrow a \in (-1, 1) \quad (0.25p.)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ es convergente ya que $-\frac{1}{4} \in (-1, 1)$. También se puede demostrar la convergencia usando el criterio de Leibniz para series alternadas. (0.25p.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} \quad \forall a \in (-1, 1) \text{ . Por tanto } \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{-1/4}{1-1/4} = -\frac{1}{3} \quad (0.25p.)$$

- 8) Estudiar el carácter de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2/3}}{n^2 + 1}$ (0.75p.)

Solución.

Usamos el criterio de comparación. Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2/3}}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3} + \alpha}}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{si} \quad \alpha = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Por el criterio de comparación resulta que la serie dada tiene el mismo carácter que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} \text{ es convergente ; por tanto la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2/3}}{n^2 + 1} \text{ es convergente.}$$

- 9) Sea $f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6}$. Calcular los límites direccionales de f en el punto $(0, 0)$ mediante rectas y a través de la curva $x = y^2$. Comprobar que no existe el límite doble de f en el punto $(0, 0)$. (1.25p.)

Solución.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m^3 x^3}{x^4 + m^6 x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^3 x}{1 + m^6 x^2} = \frac{0}{1} = 0 \quad (0.4p.)$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x = y^2}} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4 y^3}{y^8 + y^6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \quad (0.35p.)$$

Para comprobar que no existe el límite doble de f en el punto $(0, 0)$ usamos la curva $x^2 = y^3$ y comprobamos que el límite correspondiente es distinto de cero.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x^2 = y^3}} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3 y^3}{y^6 + y^6} = \frac{1}{2} \quad (0.5p.)$$