

EXAMEN DE CÁLCULO. GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 22-05-2012

1)

a) Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definir cuando f es inyectiva en D y usar la composición de funciones para definir la función inversa f^{-1} (supuesto que f sea inyectiva).

b) Obtener el dominio de $f(x) = -\sqrt{\log(x)}$. Calcular f^{-1} y el dominio de f^{-1} .

(1.3p.)

Solución.

a)

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow : \forall x_1, x_2 \in D / f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Si f es inyectiva entonces existe una única función f^{-1} verificando $f \circ f^{-1} = I$, es decir,
 $f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in \text{Im } f$.

b) $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / \log(x) \geq 0\} = [1, +\infty)$

$$f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow -\sqrt{\log(f^{-1}(x))} = x \Leftrightarrow \log(f^{-1}(x)) = x^2 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = e^{x^2}$$

$$\text{Dom } f^{-1} = \text{Im } f = (-\infty, 0]$$

2) Definir derivadas laterales de una función f en un punto c . Aplicar la definición para estudiar si

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ e^{-x} - x - 1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

es derivable por la derecha en $c = -1$.

(1.3p.)

Solución.

f es derivable por la derecha en c si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

f es derivable por la izquierda en c si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-(-1+h)} - 1 + h + 1 - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{1-h} + h - e}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-e^{1-h} + 1}{1} = 1 - e \end{aligned}$$

Por tanto, f es derivable por la derecha en $c = -1$.

3) Obtener el mínimo absoluto de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ en el intervalo $[-2, 2]$.

(1p.)

Solución.

Sabemos que toda función continua en un intervalo cerrado alcanza el máximo y el mínimo en algún punto del intervalo. El mínimo que buscamos se puede alcanzar en uno de los extremos del intervalo o bien en un punto interior; en caso de que se alcance en un punto interior ha de ser necesariamente un punto crítico de la función.

Los puntos críticos de f , si existen, son los puntos en los que la derivada de f se anula y también los puntos en los que f no es derivable. En nuestro caso, la función es derivable en todo punto.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in (-2, 2)$$

Evaluamos ahora la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos obtenidos.

$$f(-2) = -0.4 \quad f(-1) = -0.5 \quad f(1) = 0.5 \quad f(2) = 0.4$$

$$\text{Así pues, } \min_{x \in [-2, 2]} f(x) = -0.5$$

4) Calcular $\int_1^e \log(x) dx$

(0.8p.)

Solución.

$$\int_1^e \log(x) dx = x \cdot \log(x) \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e \log(e) - \log(1) - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1$$

$$u = \log(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad ; \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

5) Calcular el área determinada por la curva $y = \sqrt{2 - x^2}$, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

$$\sin(\pi/6) = 1/2 \quad ; \quad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad ; \quad \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$$

(1.5p.)

Solución.

La función $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ verifica que $f(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$. Por tanto, el área pedida es

$$A = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{cambio de variable: } x = \sqrt{2} \sin(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

$$\sqrt{2} \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad ; \quad \sqrt{2} \sin(\beta) = 1 \Rightarrow \sin(\beta) = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \beta = \pi/4$$

$$A = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2-2\sin^2(t)} \sqrt{2} \cos(t) dt = 2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = 2 \int_0^{\pi/4} \cos^2(t) dt =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \int_0^{\pi/4} 1 + \cos(2t) dt = t + \frac{1}{2} \sin(2t) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

- 6) Razonar si la sucesión $\{a_n\} = \frac{n^2}{2n^3+1} \cos(n)$ es convergente, divergente u oscilante (0.8p.)

Solución.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{2} = 0$$

$\{\cos(n)\}$ es una sucesión acotada ya que $|\cos(n)| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Sabemos que el producto de una sucesión convergente a cero por una acotada es convergente a cero. Por tanto $\{a_n\}$ es una sucesión convergente.

- 7) Justificar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente y obtener su suma.

(0.8p.)

Solución.

Hay varias formas de justificar que la serie es convergente. El criterio de Leibniz para series alternadas es de fácil aplicación ya que la sucesión $\{(1/2)^n\}$ es decreciente y convergente a cero. También se puede comprobar que es absolutamente convergente y por tanto convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ serie geométrica convergente ya que la razón } \frac{1}{2} \in (-1, 1)$$

Lo más directo es escribir $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ serie geométrica convergente ya que la razón

$-\frac{1}{2} \in (-1, 1)$ y debemos saber sumarla. Resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-1/2}{1 - (-1/2)} = \frac{-1/2}{3/2} = -\frac{1}{3}$$

8) Estudiar el carácter de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 \sqrt{n} + 1}$

(1.25p.)

Solución.

Usamos el criterio de comparación con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ que converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2 \sqrt{n} + 1}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha+2}}{n^{5/2} + 1} = 1 \quad \text{si} \quad \alpha = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

Por tanto la serie a estudiar y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ tienen el mismo carácter. Hemos demostrado que la serie dada es divergente.

9) Sea $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$. Calcular los límites direccionales de f en el punto $(0, 0)$ mediante rectas y a través de la curva $x = y^2$. Comprobar que no existe el límite doble de f en el punto $(0, 0)$. (1.25p.)

Solución.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xm^3x^3}{x^2 + m^6x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^3x^2}{1 + m^6x^4} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x = y^2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2y^3}{y^4 + y^6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{1 + y^2} = \frac{0}{1} = 0$$

Para comprobar que no existe el límite doble de f en el punto $(0, 0)$ vamos a elegir una curva a través de la cual el límite direccional es distinto de cero.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x = y^3}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3y^3}{y^6 + y^6} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^6}{2y^6} = \frac{1}{2}$$