Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO.
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 22-05-2012

1)
a) Sea $f : D \subset R \to R$. Definir cuando f es inyectiva en D y usar la composición de funciones para definir la función inversa f^{-1} (supuesto que f sea inyectiva).
b) Obtener el dominio de $f(x) = -\sqrt{\log(x)}$. Calcular f^{-1} y el dominio de f^{-1} .

(1.3p.)

Solución.
a)

$$f : D \subset R \to R \text{ es } \textit{inyectiva} \Leftrightarrow: \ \forall x_1, x_2 \in D \ / \ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2$$

Si f es inyectiva entonces existe una única función f^{-1} verificando $f \circ f^{-1} = I$, es decir, $f\left(f^{-1}(x)\right) = x \quad \forall x \in \operatorname{Im} f$.

b) $\operatorname{Dom} f = \{x \in R \,/\, \log(x) \geq 0\} = [1, +\infty)$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \ \Leftrightarrow \ -\sqrt{\log\left(f^{-1}(x)\right)} = x \ \Leftrightarrow \ \log\left(f^{-1}(x)\right) = x^2 \ \Leftrightarrow \ f^{-1}(x) = e^{x^2}$$

$$\operatorname{Dom} f^{-1} = \operatorname{Im} f = (-\infty, 0]$$

2) Definir derivadas laterales de una función f en un punto c. Aplicar la definición para estudiar si

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ e^{-x} - x - 1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

es derivable por la derecha en $c = -1$.

(1.3p.)

Solución.
f es derivable por la derecha en c si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

f es derivable por la izquierda en c si existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-(-1+h)} - 1 + h + 1 - e}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{1-h} + h - e}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-e^{1-h} + 1}{1} = 1 - e$$

Por tanto, f es derivable por la derecha en $c = -1$.

3) Obtener el mínimo absoluto de $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ en el intervalo $[-2,2]$.

(1p.)

Solución.

Sabemos que toda función continua en un intervalo cerrado alcanza el máximo y el mínimo en algún punto del intervalo. El mínimo que buscamos se puede alcanzar en uno de los extremos del intervalo o bien en un punto interior; en caso de que se alcance en un punto interior ha de ser necesariamente un punto crítico de la función.

Los punto críticos de f, si existen, son los puntos en los que la derivada de f se anula y también los puntos en los que f no es derivable. En nuestro caso, la función es derivable en todo punto.

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0 \iff x=\pm 1\in(-2,2)$$

Evaluamos ahora la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos obtenidos.

$f(-2)=-0.4$ $\qquad f(-1)=-0.5$ $\qquad f(1)=0.5$ $\qquad f(2)=0.4$

Así pues, $\min\limits_{x\in[-2,2]} f(x)=-0.5$

4) Calcular $\displaystyle\int_1^e \log(x)dx$

(0.8p.)

Solución.

$$\int_1^e \log(x)dx = x.\log(x)\,]_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x}dx = e\log(e)-\log(1)-\int_1^e dx = e-(e-1)=1$$

$$u=\log(x) \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \quad ; \quad dv=dx \Rightarrow v=x$$

5) Calcular el área determinada por la curva $y=\sqrt{2-x^2}$, las rectas $x=0$ y $x=1$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

$$sen(\pi/6)=1/2 \quad ; \quad sen(\pi/3)=\sqrt{3}/2 \quad ; \quad sen(\pi/4)=1/\sqrt{2}$$

(1.5p.)

Solución.

La función $f(x)=\sqrt{2-x^2}$ verifica que $f(x)>0 \quad \forall x\in[0,1]$. Por tanto, el área pedida es

$$A=\int_0^1 f(x)dx$$

cambio de variable: $x=\sqrt{2}\,sen(t)$, $\quad t\in[\alpha,\beta]$

$$\sqrt{2}\,sen(\alpha)=0 \Rightarrow sen(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha=0 \ ; \quad \sqrt{2}\,sen(\beta)=1 \Rightarrow sen(\beta)=1/\sqrt{2} \Rightarrow \beta=\pi/4$$

$$A=\int_0^{\pi/4}\sqrt{2-2sen^2(t)}\,\sqrt{2}\cos(t)dt=2\int_0^{\pi/4}\sqrt{1-sen^2(t)}\cos(t)dt=2\int_0^{\pi/4}\cos^2(t)dt\;=$$

$$=2\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=\int_0^{\pi/4}1+\cos(2t)dt=t+\frac{1}{2}sen(2t)\,]_0^{\pi/4}\;=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-0=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

6) Razonar si la sucesión $\{a_n\}=\dfrac{n^2}{2n^3+1}\cos(n)$ es convergente, divergente u oscilante

(0.8p.)

Solución.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^3}}=\frac{0}{2}=0$$

$\{\cos(n)\}$ es una sucesión acotada ya que $|\cos(n)|<1 \qquad \forall n\in N$

Sabemos que el producto de una sucesión convergente a cero por una acotada es convergente a cero. Por tanto $\{a_n\}$ es una sucesión convergente.

7) Justificar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente y obtener su suma.

(0.8p.)

Solución.

Hay varias formas de justificar que la serie es convergente. El criterio de Leibniz para series alternadas es de fácil aplicación ya que la sucesión $\{(1/2)^n\}$ es decreciente y convergente a cero. También se puede comprobar que es absolutamente convergente y por tanto convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ serie geométrica convergente ya que la razón $\frac{1}{2}\in(-1,1)$

Lo más directo es escribir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ serie geométrica convergente ya que la razón $-\frac{1}{2}\in(-1,1)$ y debemos saber sumarla. Resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{-1/2}{1-(-1/2)}=\frac{-1/2}{3/2}=-\frac{1}{3}$$

8) Estudiar el carácter de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2\sqrt{n}+1}$

(1.25p.)

Solución.

Usamos el criterio de comparación con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ que converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha+2}}{n^{5/2}+1} = 1 \qquad \text{si} \qquad \alpha = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

Por tanto la serie a estudiar y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ tienen el mismo carácter. Hemos demostrado que la serie dada es divergente.

9) Sea $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^6}$. Calcular los límites direccionales de f en el punto $(0,0)$ mediante rectas y a través de la curva $x = y^2$. Comprobar que no existe el límite doble de f en el punto $(0,0)$.

(1.25p.)

Solución.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{xm^3x^3}{x^2+m^6x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{m^3x^2}{1+m^6x^4} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=y^2}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2y^3}{y^4+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{1+y^2} = \frac{0}{1} = 0$$

Para comprobar que no existe el límite doble de f en el punto $(0,0)$ vamos a elegir una curva a través de la cual el límite direccional es distinto de cero.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=y^3}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3y^3}{y^6+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{2y^6} = \frac{1}{2}$$