

EXAMEN DE CÁLCULO. SEGUNDO CONTROL (50%)
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 29-11-2011

1) Calcular las siguientes integrales indefinidas (sin realizar cambio de variable):

a) $\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$; b) $\int \frac{x^2}{1+4x^6} dx$; c) $\int x \cdot \log(x) dx$
 (0.5p.+ 0.75+ 1p.)

Solución.

a)

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{\sin^2(x)}{2} + C$$

b)

$$\int \frac{x^2}{1+4x^6} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x^2}{1+(2x^3)^2} dx = \frac{1}{6} \arctg(2x^3) + C$$

c)

$$u = \log(x) \quad du = \frac{1}{x} dx \quad dv = x dx \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \cdot \log(x) dx = \frac{x^2}{2} \log(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \log(x) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \log(x) - \frac{1}{4} x^2 + C$$

2) Calcular el área determinada por la curva $y = \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}$, las rectas $x=0$ y $x=1$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

(4.25p.)

$$\sin(\pi/6) = 1/2 \quad ; \quad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad ; \quad \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \quad ; \quad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Solución.

Hacemos el cambio de variable: $x = 2\sin(t)$, $t \in [0, \pi/6]$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{8\sin^3(t)}{\sqrt{4-4\sin^2(t)}} 2\cos(t) dt = 8 \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^3(t)}{2\sqrt{\cos^2(t)}} 2\cos(t) dt = \\ &= 8 \int_0^{\pi/6} \sin^3(t) dt = 8 \int_0^{\pi/6} \sin(t) (1 - \cos^2(t)) dt = 8 \int_0^{\pi/6} \sin(t) dt - 8 \int_0^{\pi/6} \sin(t) \cos^2(t) dt = \end{aligned}$$

$$= -8 \cos(t) \Big|_0^{\pi/6} + 8 \frac{\cos^3(t)}{3} \Big|_0^{\pi/6} = -8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) + \frac{8}{3} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 1 \right] = \frac{16}{3} - 3\sqrt{3}$$

3) Se consideran dos sucesiones de números reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que:

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = -\frac{1}{4a_n} + 1 \quad n \geq 1$$

$$\{b_n\} = \frac{n^2 + 1}{n + 1}$$

a) Demostrar, por inducción, que $a_n > 1/2 \quad \forall n$.

b) Demostrar que $\{b_n\}$ es estrictamente creciente

(3.5p.)

Solución.

a)

Si $n = 1$, $a_1 = 1 > 1/2$ cierto

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n > 1/2$ y demostraremos que $a_{n+1} > 1/2$

$$a_n > 1/2 \Rightarrow 4a_n > 2 \Rightarrow \frac{1}{4a_n} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4a_n} > -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4a_n} + 1 > -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

b)

$$\{b_n\} \text{ es estrictamente creciente} \Leftrightarrow b_n < b_{n+1} \quad \forall n \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n > 0 \quad \forall n$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)^2 + 1}{n+1+1} - \frac{n^2 + 1}{n+1} = \frac{(n^2 + 2n + 2)(n+1) - (n^2 + 1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{n^3 + 2n^2 + 2n + n^2 + 2n + 2 - n^3 - n - 2n^2 - 2}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 + 3n}{(n+2)(n+1)} > 0$$

$$\text{ya que } n^2 + 3n > 0, \quad n+2 > 0 \text{ y } n+1 > 0 \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

