

EXAMEN DE CÁLCULO. PRIMER CONTROL (50%)
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 20-10-2011

1) Sea $f(x) = \frac{x-1}{x\sqrt{x+3}}$

a) Hallar el dominio de f y obtener, si existen, las asíntotas verticales (por la izquierda y/o por la derecha) de f . ¿Es f acotada superiormente en su dominio? Razonar la respuesta.

b) Obtener, si existen, las asíntotas horizontales (en el $-\infty$ y/o en el $+\infty$) de f . ¿Tiene f alguna asíntota oblicua? Razonar la respuesta.

c) Representar en el plano las asíntotas y la posición de la curva $y = f(x)$ respecto a las mismas.

Solución.

a) $Dom f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ y } x+3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ y } x > -3\} = (-3, +\infty) - \{0\}$
 (0.3p.)

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-1}{x\sqrt{x+3}} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$x = -3$ es una asíntota vertical por la derecha. No lo es por la izquierda ya que la función f no está definida para valores de x menores que -3 .

(0.3p.)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x\sqrt{x+3}} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x\sqrt{x+3}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$x = 0$ es una asíntota vertical por la izquierda y por la derecha

(0.6p.)

El conjunto imagen de f no está acotado superiormente ya que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$. Por tanto,

f no es acotada superiormente en su dominio.

(0.3p.)

b)

No hay asíntota horizontal en el $-\infty$ ya que el dominio de f es un conjunto acotado inferiormente y por tanto no tiene sentido calcular el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

(0.3p.)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{x+3}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

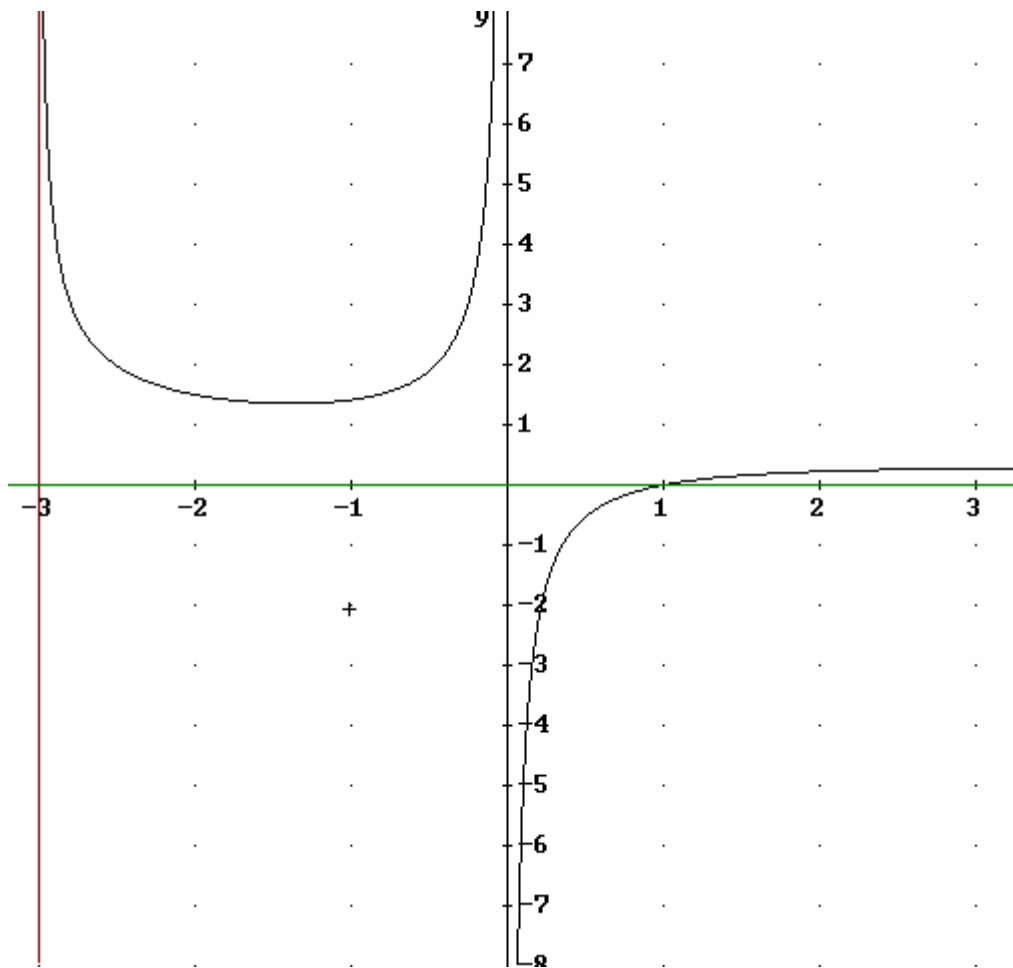
$y = 0$ es asíntota horizontal en el $+\infty$

(0.9p.)

No hay asíntota oblicua en el $-\infty$ por la misma razón que no la había horizontal. Tampoco hay asíntota oblicua en el $+\infty$ ya que la hay horizontal.

(0.3p.)

c)



(1p.)

2) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \log(x) & , x > 1 \\ 1 - x^2 & , x \leq 1 \end{cases}$$

a) Utilizar la definición de derivada lateral, para responder a las siguientes preguntas: ¿Es f derivable por la izquierda en $x = 1$? ¿Es f derivable por la derecha en $x = 1$? ¿Es f derivable en $x = 1$?

b) Escribir las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ en su dominio ¿es $f(1)$ un extremo relativo? ¿es $f(1)$ un punto de inflexión? ¿cuántos puntos de inflexión tiene f ? Razonar adecuadamente las respuestas.

Solución.

a) Aunque no es necesario, se podría empezar demostrando que f es continua en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x^2 = 0 = f(1) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x \cdot \log(x) = 0 = f(1)$$

f es derivable por la izquierda en $x = 1 \Leftrightarrow$ existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(-1^-)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - (1+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-h - 2) = -2 \quad (1p.)$$

f es derivable por la derecha en $x = 1 \Leftrightarrow$ existe y es finito el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(-1^+)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)\log(1+h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+h) + \frac{1+h}{1+h}}{1} = 1 \quad (1p.)$$

Así pues, f es derivable por la izquierda y por la derecha en $x = 1$. Sin embargo, f no es derivable en $x = 1$ ya que las derivadas laterales no coinciden: $f'(-1^-) \neq f'(-1^+)$ (0.5p.)

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \log(x) + 1 & \text{si } x > 1 \\ -2x & \text{si } x < 1 \end{cases} ; \quad f''(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 1 \\ -2 & \text{si } x < 1 \end{cases} \quad (0.7p.+0.6p.)$$

$$\begin{aligned} \log(x) + 1 = 0 &\Leftrightarrow \log(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \notin (1, +\infty) \\ -2x = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Los puntos críticos de f son $x = 0$ ya que $f'(0) = 0$ y $x = 1$ ya que no existe $f'(1)$. Los intervalos de monotonía son: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in (0, 1), \quad f'(x) = -2x < 0 &\Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente en } (0, 1) \\ \text{Si } x \in (1, +\infty), \quad f'(x) = \log(x) + 1 > 0 &\Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en } (1, +\infty) \end{aligned}$$

Aplicando el criterio de la derivada primera ($x = 1$ es un punto crítico de f donde la función es continua y pasa de decreciente a creciente) se tiene que $f(1)$ es un mínimo relativo. (1p.)

Condición necesaria para que f tenga un punto de inflexión en $x = 1$ es que $f''(1) = 0$ ó no exista $f''(1)$. En nuestro caso, no existe $f''(1)$

$$\text{Si } x \in (-\infty, 1), \quad f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava hacia abajo en } (-\infty, 1)$$

$$\text{Si } x \in (1, +\infty), \quad f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava hacia arriba en } (1, +\infty)$$

Así pues, $f(1)$ es también un punto de inflexión y es el único punto de inflexión ya que en los demás puntos existe la derivada segunda de f y es distinta de cero. (1.2p.)

