

EXAMEN DE CÁLCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 25-01-2011

1)

a) Definir sucesión divergente y poner un ejemplo de una sucesión divergente que no tenga límite. (0.75p.)

b) Poner un ejemplo de dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergentes a cero tal que la sucesión cociente $\{a_n / b_n\}$ sea divergente.

(0.75p.)

c) Obtener razonadamente el límite de la sucesión:

$$\{a_n\} = \frac{3n+5}{\sqrt[3]{4n^3+7n-1}} + \frac{n^2}{2n^3+1} \cdot \text{sen}(n)$$

(1.25p.)

Solución.

a)

$$\{a_n\} \text{ es divergente } \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$$

$$\{a_n\} = (-1)^n n = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\} \text{ es divergente ya que } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

No tiene límite ya que si una sucesión tiene límite, finito o infinito, todas sus subsucesiones tienen también el mismo límite. En este caso la subsucesión de los n pares tiene límite $+\infty$ y la de los impares tiene límite $-\infty$.

b)

$$\begin{aligned} \{a_n\} &= \frac{1}{n} & \{b_n\} &= \frac{1}{n^2} \quad \text{son convergentes a cero} \\ \{a_n / b_n\} &= \{n\} \rightarrow +\infty \quad \text{divergente} \end{aligned}$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{\sqrt[3]{4n^3+7n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n}{n} + \frac{5}{n}}{\sqrt[3]{\frac{4n^3}{n^3} + \frac{7n}{n^3} - \frac{1}{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n}}{\sqrt[3]{4 + \frac{7}{n^2} - \frac{1}{n^3}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^3+1} \text{sen}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^3}} \text{sen}(n) = 0 \quad \text{ya que es el producto de una sucesión}$$

convergente a cero por otra que es acotada.

$$\text{Por tanto } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{\sqrt[3]{4n^3+7n-1}} + \frac{n^2}{2n^3+1} \cdot \text{sen}(n) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

2) Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales definida recurrentemente por:

$$a_1 = -2; \quad a_{n+1} = -2 - \frac{1}{a_n} \quad n \geq 1$$

a) Demostrar, por inducción, que $\{a_n\}$ está acotada superiormente.

(1.25p.)

b) Obtener el límite de la sucesión $\{a_n\}$, suponiendo que sea convergente.

(1p.)

Solución.

$$a_1 = -2; \quad a_2 = -2 - \frac{1}{-2} = -\frac{3}{2} = -1.5; \quad a_3 = -2 - \frac{1}{-3/2} = -\frac{4}{3} = -1.33...$$

a)

Vamos a demostrar, por inducción, que $a_n < -1 \quad \forall n$.

Para $n=1$, $a_1 = -2 < -1$ cierto

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n < -1$ y demostraremos que $a_{n+1} < -1$

$$a_n < -1 \Rightarrow \frac{1}{a_n} > \frac{1}{-1} \Rightarrow -\frac{1}{a_n} < \frac{1}{1} \Rightarrow -2 - \frac{1}{a_n} < -2 + 1 = -1$$

b) Suponiendo que sea convergente, sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = l = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_{n+1}\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_{n+1}\} = -2 - \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}} \Leftrightarrow l = -2 - \frac{1}{l} \Leftrightarrow l^2 + 2l + 1 = 0 \Leftrightarrow l = -1$$

3)

a) Enunciar los criterios del cociente y de Raabe para series de términos positivos.

(0.5p.)

b) Hallar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots (3n)}$$

(2p.)

Solución.

a) *Criterio del cociente.*

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con términos positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Si $l < 1$ la serie es

convergente. Si $l > 1$ la serie es divergente. Si $l = 1$ el criterio no decide.

Criterio del Raabe.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con términos positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = l$. Si $l > 1$ la serie es

convergente. Si $l < 1$ la serie es divergente. Si $l = 1$ el criterio no decide.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots (3n)} \quad a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots (3n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)(3n+2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots (3n)(3n+3)} \cdot \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots (3n)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{3n+3} = 1 \quad \text{no decide}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{3n+2}{3n+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+3} = \frac{1}{3} < 1 \quad \text{divergente}$$

4) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3+n\sqrt{n}}$ es absolutamente convergente. (1.25p.)

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{4n+2} \right)^n$ es absolutamente convergente y por tanto convergente. (1.25p.)

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3+n\sqrt{n}} \text{ es absolutamente convergente} \Leftrightarrow: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3+n\sqrt{n}} \text{ es convergente}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{3+n\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{3+n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{3}{n\sqrt{n}} + 1} = 1$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}} \text{ es divergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3+n\sqrt{n}} \text{ es divergente (criterio de comparación).}$$

La afirmación es falsa

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{4n+2} \right)^n \text{ es absolutamente convergente} \Leftrightarrow: \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{4n+2} \right)^n \text{ es convergente}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{4n+2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{4n+2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{4n+2} \right)^n \text{ es convergente (criterio de la raíz).}$$

Por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{4n+2} \right)^n$ es absolutamente convergente y sabemos que toda serie absolutamente convergente también es convergente. La afirmación es cierta.

