Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

EXAMEN DE CÁLCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 25-01-2011

1) Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{\log^3(x)}{x}dx$; b) $\int arctg(x)dx$

(0.75p.+ 1p.)

Solución.

a)

$$\int \frac{\log^3(x)}{x}dx = \int \log^3(x)\frac{1}{x}dx = \frac{\log^4(x)}{4} + C$$

b)

$$u = arctg(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx \quad ; \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$ método de integración por partes

$$\int arctg(x)dx = x.arctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x.arctg(x) - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + C$$

2) Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^{3} \left|x^2 - 1\right| dx$; b) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x(x+1)^2}dx$

(1.25p.+ 1.5p.)

Solución.

a)

$$\left|x^2 - 1\right| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \text{ ó } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1,1] \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{3} \left|x^2 - 1\right| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx + \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx + \int_{1}^{3} (x^2 - 1)dx = \left.\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} + \left. x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} +$$

$$+ \left.\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3} = \left(-\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{8}{3}+2\right) + \left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right) + (9-3) - \left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{28}{3}$$

b) Descomponemos la función integrando en suma de fracciones simples. Tenemos que obtener los valores de A, B, C tales que:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Quitamos denominadores y resulta $A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = 1$

Si $x = 0 \Rightarrow A = 1$; si $x = -1 \Rightarrow C = -1$; si $x = 1 \Rightarrow 4 + 2B - 1 = 1 \Rightarrow B = -1$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} \right) dx = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} \Big]_1^2 =$$

$$= \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} \Big]_1^2 = \log\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} - \log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 2\log(2) - \log(3) - \frac{1}{6}$$

3) Calcular el área determinada por la curva $y = \sqrt{16 - x^2}$, las rectas $x = 0$, $x = 2$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

(2.5p.)

$sen(\pi/4) = \sqrt{2}/2$; $sen(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$; $sen(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

Solución.

Cambio de variable: $x = 4sen(t)$, $t \in [0, \pi/6]$ ya que $4sen(0) = 0$ y $4sen(\pi/6) = 2$

$$A = \int_0^2 \sqrt{16 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt{16 - 16sen^2(t)}\, 4\cos(t)dt = 16 \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 - sen^2(t)}\, \cos(t)dt =$$

$$= 16 \int_0^{\pi/6} \cos^2(t)dt = 16 \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = 8 \int_0^{\pi/6} (1 + \cos(2t))dt = 8t\Big]_0^{\pi/6} + 4sen(2t)\Big]_0^{\pi/6} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 4\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

4) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $\int_a^b f(x)dx < 0$ entonces $f(x) \le 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

(1p.)

b) $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$

(0.75p.)

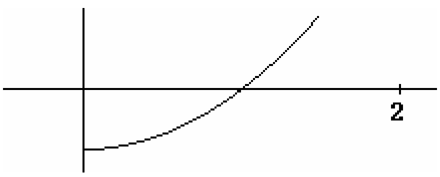
c) El polinomio de Taylor de orden 2 asociado a la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $x_0 = 1$ es

$$-\frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{5}{9}$$

(1.25p.)

Solución.

a) La afirmación es falsa. Veamos un contraejemplo.



$$\int_0^{3/2}\left(x^2-1\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}-x\right]_0^{3/2}=\frac{27}{24}-\frac{3}{2}<0 \quad \text{; sin embargo } \quad x^2-1>0 \qquad \forall x\in\left(1\,,3/2\right]$$

b)

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)}=\frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}}{1}=\pi \qquad \text{la afirmación es verdadera}$$

c)

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\;=x^{1/3}\;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}\;\Rightarrow\; f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

$$P_2(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2=1+\frac{1}{3}(x-1)+\frac{-2/9}{2}(x-1)^2=$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\left(x^2-2x+1\right)=-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{9}x+\frac{5}{9}$$

La afirmación es cierta.