

EXAMEN DE CÁLCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 25-01-2011

1) De las cuatro equivalencias siguientes decir las que son ciertas y las que no lo son.

- a) $|t-2| \leq 2 \Leftrightarrow t \in [0, 4]$; b) $|t-2| \leq 2 \Leftrightarrow t \leq 0 \text{ ó } t \geq 4$
 c) $|t-2| \leq 2 \Leftrightarrow |2-t| \leq 2$; d) $|t-2| \leq 2 \Leftrightarrow -4 \leq t \leq 4$

(0.5p.)

y utilizar una de ellas para obtener los números reales x que verifican la desigualdad:

$$\left| \frac{x}{x^2+1} - 2 \right| \leq 2$$

(1p.)

Solución.

Son ciertas a) y c). Son falsas b) y d)

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{x^2+1} - 2 \right| \leq 2 &\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \in [0, 4] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4x^2+4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ y } 4x^2 - x + 4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$4x^2 - x + 4 = \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + 4 - \frac{1}{16} = \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{63}{16} > 0 \quad \forall x$$

Por tanto $\left| \frac{x}{x^2+1} - 2 \right| \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 0$

2) Se considera la función

$$f(x) = \frac{3x+7}{x+2} = 3 + \dots$$

a) Hallar el dominio y la imagen de f . Esbozar la gráfica de f (hipérbola equilátera).

(1.25p)

b) ¿Es f acotada en su dominio? ¿Es f acotada en el intervalo $[-1, 1]$? Razonar las respuestas.

¿Quién es el máximo de $f(x)$ si $x \in [-1, 1]$? ¿Quién es el mínimo de $f(x)$ si $x \in [-1, 1]$?

(1.25p)

c) Determinar g tal que $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x}$. Además de $x = 0$, ¿qué punto $x \notin \text{Dom}(f \circ g)$?

(1.p)

Solución.

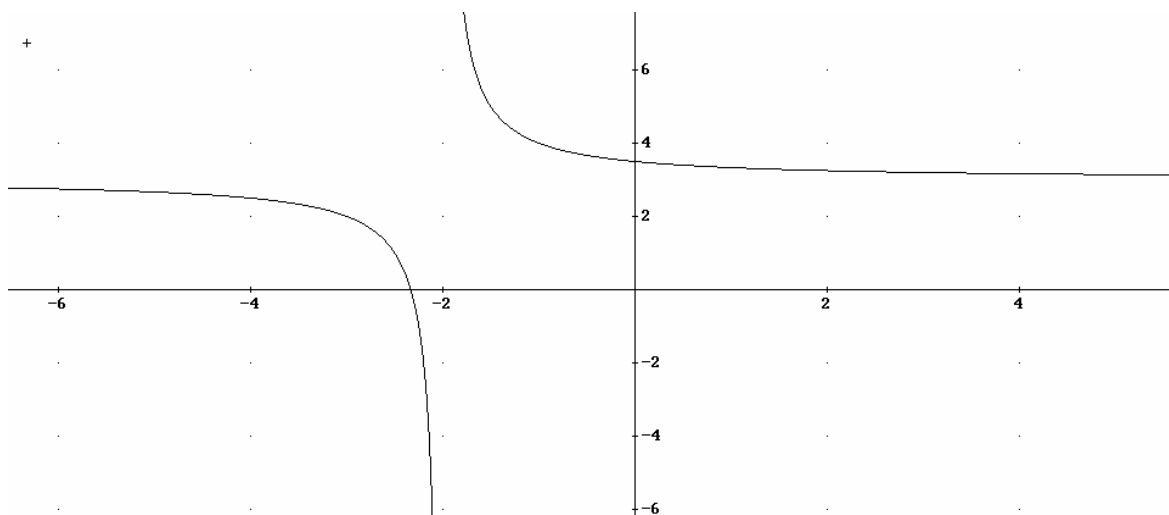
$$f(x) = \frac{3x+7}{x+2} = 3 + \frac{1}{x+2}$$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

$$\text{Si } x \in \text{Dom } f \Rightarrow x+2 \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \frac{1}{x+2} \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow 3 + \frac{1}{x+2} \in \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\text{Im } f = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3^+ \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3^-$$



b)

f no es acotada en su dominio ya que el conjunto imagen $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ no es acotado.

f es acotada en el intervalo $[-1, 1]$ ya que toda función continua en un intervalo cerrado es acotada en dicho intervalo. Además, al ser f decreciente en $[-1, 1]$, si $x \in [-1, 1] \Rightarrow$

$$f(x) \in [f(1), f(-1)] = \left[\frac{10}{3}, 4 \right]$$

$$\text{Por tanto, } \max_{x \in [-1, 1]} f(x) = 4 \quad ; \quad \min_{x \in [-1, 1]} f(x) = \frac{10}{3}$$

$$\text{c) } (f \circ g)(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(g(x)) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{g(x)+2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow g(x)+2 = \frac{1}{\frac{1}{x}-3} = \frac{x}{1-3x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{x}{1-3x} - 2 = \frac{7x-2}{1-3x}$$

$$0 \notin \text{Dom}(f \circ g) \quad ; \quad \frac{1}{3} \notin \text{Dom}(f \circ g) \quad \text{ya que } \frac{1}{3} \notin \text{Dom } g$$

3)

a) Definir función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y enunciar el teorema de Rolle.

(1.25p.)

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(2x))}{\log(\cos(5x))}$

(1.25p.)

Solución.

a) f es continua en un intervalo cerrado $[a, b] \Leftrightarrow$: f es continua en todos los puntos del abierto (a, b) , es continua por la derecha en a y es continua por la izquierda en b .

El teorema de Rolle afirma: si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$ entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(2x))}{\log(\cos(5x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}{\frac{-5\operatorname{sen}(5x)}{\cos(5x)}} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{tg}(5x)} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1+\operatorname{tg}^2(2x))}{5(1+\operatorname{tg}^2(5x))} = \frac{4}{25}$$

4)

a) Sea $f \in C^n(a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$ / $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Enunciar el criterio de la derivada enésima para la determinación de extremos relativos de f .
(1.p)

b) Demostrar que $x = 0$ es un punto crítico de $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \cos(x)$ ¿Es $f(0) = 2$ un máximo relativo de f ? ¿Es $f(0) = 2$ un mínimo relativo de f ? Razonar las respuestas.

(1.5p.)

Solución.

a) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en x_0 .

Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en x_0 .

Si n es impar $\Rightarrow f$ no tiene extremo en x_0 .

b) $f(x)$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$. $x = 0$ es punto crítico de $f \Leftrightarrow f'(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'(0) = \frac{1-1}{2} - 0 = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \cos(x) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 2$$

Por tanto, $f(0) = 2$ es un mínimo relativo.

