

EXAMEN DE CÁLCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 16-12-2010

1)

a) Enunciar el teorema de la sucesión intermedia.

b) Calcular el límite de la sucesión $\{a_n\} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

Solución:

a)

Supongamos que para todo n suficientemente grande $b_n \leq a_n \leq c_n$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$ ó $l = +\infty$ ó $l = -\infty$).

(0.75p.)

b)

$$\begin{aligned} n^2+1 < n^2+2 < \dots < n^2+n &\Rightarrow \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2} < \dots < \sqrt{n^2+n} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} > \dots > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} &\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} > \dots > \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$a_n \leq n \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}} \rightarrow +\infty \quad ; \quad a_n \geq n \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}} \rightarrow +\infty$$

Así pues, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

(1.25p.)

2) Se considera la sucesión $\{a_n\}$ de números reales definida recurrentemente por:

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n} \quad n \geq 1$$

a) Demostrar, por inducción, que $a_n > 1/2 \quad \forall n$.

b) Demostrar, sin aplicar inducción, que $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente.

Solución:

$$a_1 = 1 \quad ; \quad a_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad ; \quad a_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad ; \quad a_4 = 1 - \frac{1}{8/3} = \frac{5}{8}$$

a) Para $n=1$ $a_1 = 1 > 1/2$ cierto

Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_n > 1/2$ y demostraremos que $a_{n+1} > 1/2$

$$a_n > 1/2 \Rightarrow 4a_n > 2 \Rightarrow \frac{1}{4a_n} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4a_n} > -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{4a_n} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(1p.)

b) $\{a_n\}$ es estrictamente decreciente $\Leftrightarrow a_n > a_{n+1} \quad \forall n \Leftrightarrow a_n - a_{n+1} > 0 \quad \forall n$

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \left(1 - \frac{1}{4a_n}\right) = a_n - 1 + \frac{1}{4a_n} = \frac{4a_n^2 - 4a_n + 1}{4a_n} = \frac{(2a_n - 1)^2}{4a_n} > 0$$

ya que $a_n > 1/2 > 0$ (1p.)

3) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $\{a_n\}$ es una sucesión divergente entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = +\infty$ ó $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = -\infty$.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-4}{n}\right)^n$ no es convergente ya que no verifica la condición necesaria de convergencia.

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 \sqrt{n} + 3}$ es convergente y también absolutamente convergente.

Solución.

a)

$\{a_n\} = (-1)^n \cdot n = \{-1, 2, -3, 4, -5, \dots\}$ es una sucesión divergente ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

Sin embargo la sucesión $\{a_n\}$ no tiene límite. Por tanto la afirmación es FALSA.

(0.5p.)

b)

$$\left(\frac{n-4}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n/(-4)}\right)^{\frac{n}{-4} \cdot (-4)} \rightarrow e^{-4}$$

El límite del término general de la serie es distinto de cero, es decir, la serie no verifica la condición necesaria de convergencia. Por tanto, no es convergente y la afirmación es CIERTA.

(0.75p.)

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 \sqrt{n} + 3}$ es absolutamente convergente $\Leftrightarrow: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 \sqrt{n} + 3}$ es convergente.

$$\frac{n}{n^2 \sqrt{n} + 3} = \frac{n}{n^{5/2} + 3} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^{5/2} + 3}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/2}}{n^{5/2} + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{n^{5/2}}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Aplicando el criterio de comparación en el límite obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 \sqrt{n} + 3}$ tiene el mismo carácter que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ que es convergente. Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 \sqrt{n} + 3}$ es absolutamente convergente. Al ser absolutamente convergente, también es convergente y la afirmación es CIERTA. (1.5p.)

4) Hallar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n} \right)^2$$

Solución.

Aplicamos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)(3n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots (3n)(3n+3)} \right)^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)} \right)^2 = \left(\frac{3n+1}{3n+3} \right)^2 \rightarrow 1$$

El criterio del cociente no decide. Aplicamos el criterio de Raabe.

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = n \left(1 - \frac{(3n+1)^2}{(3n+3)^2} \right) = n \left(\frac{12n+8}{9n^2+18n+9} \right) \rightarrow \frac{12}{9} = \frac{4}{3} > 1$$

La serie es convergente.

(1.75p.)

5) Justificar que la serie siguiente es convergente y obtener su suma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{7^n}$$

Solución.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{1}{7} \right)^n \quad \text{serie aritmético-geométrica convergente ya que } \frac{1}{7} \in (-1, 1).$$

$$S = \frac{3}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{7}{7^3} + \dots + \frac{2n-1}{7^{n-1}} + \frac{2n+1}{7^n} + \dots$$

$$\frac{1}{7}S = \frac{3}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \dots + \frac{2n-1}{7^n} + \dots$$

$$S - \frac{1}{7}S = \frac{3}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \dots + \frac{2}{7^n} + \dots = \frac{3}{7} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{7} \right)^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{7} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7} \right)^n - \frac{1}{7} = \frac{1/7}{1-(1/7)} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

$$\frac{6}{7}S = \frac{3}{7} + \frac{1}{21} = \frac{10}{21} \quad ; \quad S = \frac{10}{21} \cdot \frac{7}{6} = \frac{35}{63} = \frac{5}{9}$$

(1.5p.)