

EXAMEN DE CÁLCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 18-11-2010

1) Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{x^2}{4+x^6} dx$; b) $\int x \cdot \text{sen}(3x) dx$

Solución.

a)

$$\int \frac{x^2}{4+x^6} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x^2}{1+(x^3/2)^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{3x^2/2}{1+(x^3/2)^2} dx = \frac{1}{6} \arctg\left(\frac{x^3}{2}\right) + C \quad (1p.)$$

b) $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \text{sen}(3x) dx \Rightarrow v = \int \text{sen}(3x) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x)$

$$\int x \cdot \text{sen}(3x) dx = -\frac{1}{3} x \cos(3x) - \int -\frac{1}{3} \cos(3x) dx = -\frac{1}{3} x \cos(3x) + \frac{1}{9} \text{sen}(3x) + C \quad (1p.)$$

2) Obtener la primitiva F de la función $f(x) = \frac{x^2+8}{(x-1)(x+2)^2}$ que verifica $F(3) = 4$

Solución.

$$\frac{x^2+8}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} ; \quad x^2+8 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)$$

$$\text{Si } x=1 \quad 9=9A \Rightarrow A=1 ; \quad \text{Si } x=-2 \quad 12=-3C \Rightarrow C=-4$$

$$\text{Si } x=0 \quad 8=4A-2B-C=4-2B+4 \Rightarrow B=0$$

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2+8}{(x-1)(x+2)^2} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{4}{(x+2)^2} dx = \log|x-1| + \frac{4}{x+2} + C$$

$$\log(2) + \frac{4}{5} + C = 4 \Rightarrow C = \frac{16}{5} - \log(2) \Rightarrow F(x) = \log|x-1| + \frac{4}{x+2} + \frac{16}{5} - \log(2) \quad (2p.)$$

3)

a) Calcular el área determinada por la curva $y = x\sqrt{16-x^2}$, las rectas $x=0$, $x=2$ y el eje de abscisas (usando la fórmula del cambio de variable en la integral definida).

b) ¿Cuál sería el área determinada por la curva anterior si las rectas fuesen $x=-2$ y $x=2$. Razonar la respuesta.

Solución.

$$f(x) = x\sqrt{16-x^2} \geq 0 \quad \forall x \in [0, 2]$$

$$A = \int_0^2 x\sqrt{16-x^2} dx \quad \text{cambio de variable : } x = 4\operatorname{sen}(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

$$0 = 4\operatorname{sen}(\alpha), \quad \operatorname{sen}(\alpha) = 0, \quad \alpha = 0$$

$$2 = 4\operatorname{sen}(\beta), \quad \operatorname{sen}(\beta) = 1/2, \quad \beta = \pi/6$$

$$A = \int_0^{\pi/6} 4\operatorname{sen}(t)\sqrt{16-16\operatorname{sen}^2(t)} 4\cos(t)dt = 64 \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}(t)\sqrt{\cos^2(t)} \cos(t)dt =$$

$$= 64 \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}(t)\cos^2(t)dt = -64 \int_0^{\pi/6} -\operatorname{sen}(t)\cos^2(t)dt = -64 \left[\frac{\cos^3(t)}{3} \right]_0^{\pi/6} =$$

$$= -\frac{64}{3} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 1 \right) = \frac{64}{3} \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{64}{3} - 8\sqrt{3}$$

(2p.)

b) $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [-2, 0]$

$$A = \int_{-2}^0 -f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = 2 \int_0^2 f(x)dx \quad \text{ya que } f \text{ es impar}$$

$$A = \frac{128}{3} - 16\sqrt{3}$$

(0.5p.)

4) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) La integral $\int_0^1 x \log(x) dx$ es impropia

b) $\beta(3, 1) = \frac{1}{3}$

c) Si usamos el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$ en el punto

$$x_0 = 1, \text{ obtenemos que } \log\left(\frac{3}{2}\right) \approx \frac{3}{16}.$$

Solución.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

La afirmación es falsa.

(1p.)

$$b) \quad \beta(3,1) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(1)}{\Gamma(4)} = \frac{\Gamma(3)\Gamma(1)}{3\Gamma(3)} = \frac{1}{3}\Gamma(1) = \frac{1}{3}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + 1) = 1$$

la afirmación es cierta

(1p.)

c)

$$f(x) = \frac{\log(x)}{x} \Rightarrow f(1) = 0 \quad ; \quad f'(x) = \frac{1 - \log(x)}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-x - (1 - \log(x))2x}{x^4} = \frac{-3x + 2x \log(x)}{x^4} \Rightarrow f''(1) = -3$$

$$T_2(f,1)(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1}(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$$

$$f(3/2) \approx T_2(f,1)(3/2) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$f(3/2) = \frac{\log(3/2)}{3/2} \Rightarrow \log\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} f\left(\frac{3}{2}\right) \approx \frac{3}{2} \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$$

La afirmación es cierta.

(1.5p.)