

EXAMEN DE CÁLCULO

GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 28-10-2010

1) De las cuatro equivalencias siguientes decir las que son ciertas:

$$\text{a) } |t-2| \geq 2 \Leftrightarrow t \in [0, 4] \quad ; \quad \text{b) } |t-2| \geq 2 \Leftrightarrow t \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

$$\text{c) } |t-2| \geq 2 \Leftrightarrow t \in [-4, 4] \quad ; \quad \text{d) } |t-2| \geq 2 \Leftrightarrow t \leq 0 \text{ ó } t \geq 4$$

y utilizar una de ellas para obtener los números reales x que verifican la desigualdad:

$$\left| \frac{x-3}{x^2+1} - 2 \right| \geq 2$$

Solución.

Son ciertas la b) y la d).

(0.4p)

$$\left| \frac{x-3}{x^2+1} - 2 \right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x^2+1} \leq 0 \quad \text{ó} \quad \frac{x-3}{x^2+1} \geq 4$$

$$x^2+1 > 0 \quad \forall x. \text{ Por tanto, } \frac{x-3}{x^2+1} \leq 0 \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$\frac{x-3}{x^2+1} \geq 4 \Leftrightarrow x-3 \geq 4x^2+4 \Leftrightarrow 4x^2-x+7 \leq 0$$

La ecuación $4x^2-x+7=0$ no tiene soluciones reales; por tanto la inecuación $4x^2-x+7 \leq 0$ se verifica para todo x ó no se verifica para ninguno. En este caso es evidente que no se verifica para ningún x .

$$\text{En consecuencia, } \left| \frac{x-3}{x^2+1} - 2 \right| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 3 \quad (1.6p)$$

2) Obtener, de manera razonada, el dominio y la imagen de la función

$$f(x) = \frac{1}{-1 + \sqrt{4-x^2}}$$

¿Es acotada superiormente o inferiormente en su dominio? Razonar la respuesta.

Solución.

$$\begin{aligned} \text{Dom } f &= \{x \in \mathbb{R} / 4-x^2 \geq 0 \text{ y } 4-x^2 \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 4 \text{ y } x^2 \neq 3\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 2 \text{ y } x \neq \pm\sqrt{3}\} = [-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2] \end{aligned}$$

(0.8p)

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in \text{Dom } f &\Rightarrow x^2 \in [0, 4] - \{3\} \Rightarrow -x^2 \in [-4, 0] - \{-3\} \Rightarrow 4-x^2 \in [0, 4] - \{1\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{4-x^2} \in [0, 2] - \{1\} \Rightarrow -1 + \sqrt{4-x^2} \in [-1, 1] - \{0\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{-1 + \sqrt{4-x^2}} \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{aligned}$$

(1p)

f no es acotada ni superiormente ni inferiormente en su dominio ya que el conjunto imagen $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ no lo es.

(0.2p)

3) a) Definir función par, función impar y función inyectiva.

b) Sean $g(x) = x^2$ con $x > 0$ y $f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$; definimos la función compuesta $h(x) = (f \circ g)(x)$. Obtener la inversa de $h(x)$.

Solución.

a)

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $-x \in D$ si $x \in D$

f es par $\Leftrightarrow: f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$

f es impar $\Leftrightarrow: f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva $\Leftrightarrow: \quad \forall x_1, x_2 \in D / f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(1p)

b) $h(x) = f(g(x)) = f(x^2) = e^{x^2}$, $\text{Dom } h = \text{Dom } g = (0, \infty)$

h es inyectiva en el dominio considerado; por tanto existe su inversa h^{-1}

$$h(h^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow e^{(h^{-1}(x))^2} = x \Leftrightarrow (h^{-1}(x))^2 = \log(x) \Leftrightarrow h^{-1}(x) = \sqrt{\log(x)}$$

(1p)

4) Aplicar la regla de L'Hopital para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x) - \text{sen}(x)}{x^3}$. Comprobar que se

obtiene lo mismo usando que si $x \rightarrow 0$ entonces $\text{sen}(x) \approx x$ y $1 - \cos(x) \approx x^2/2$.

Solución.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x) - \text{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \text{tg}^2(x) - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\text{tg}(x)(1 + \text{tg}^2(x)) + \text{sen}(x)}{6x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\text{tg}(x) + 2\text{tg}^3(x) + \text{sen}(x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \text{tg}^2(x)) + 6\text{tg}^2(x)(1 + \text{tg}^2(x)) + \cos(x)}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(1.25p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x) - \text{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)(1 - \cos(x))}{x^3 \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \frac{x^2}{2}}{x^3 \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos(x)} = \frac{1}{2}$$

(0.75p)

5) Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot e^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- ¿Es f continua por la izquierda en $x = 0$? Razonar la respuesta.
- Justificar, sin hacer derivadas, que $f(0) = -1$ es el mínimo absoluto de la función.
- Estudiar si f tiene algún extremo relativo, distinto de $f(0) = -1$.

Solución.

- a) f es continua por la izquierda en $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 e^{1/x} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f \text{ no es continua por la izquierda en } x = 0$$

(0.5p)

- b) Si $x \neq 0$, $f(x) = x^2 e^{1/x} > 0$. Por tanto, $f(0) = -1$ es el mínimo absoluto de la función ya que $f(0) < f(x) \quad \forall x \neq 0$.
- (0.5p)

- c) Si $x \neq 0$, $f'(x) = 2xe^{1/x} - x^2 e^{1/x} \frac{1}{x^2} = e^{1/x}(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Si $x < \frac{1}{2}$, $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $(0, 1/2)$

Si $x > \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(1/2, +\infty)$

Aplicando el criterio de la derivada 1ª se tiene que $f(1/2) = \frac{e^2}{4}$ es un mínimo relativo.

(1p)