

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
TEMA 4. ACTIVIDAD 4.2 a 4.4

4.2) Sea $f(x, y) = \frac{2x^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) = 0$

- a) Calcular los límites direccionales de f en el punto $(0, 0)$ mediante rectas y a través de la curva $x = y^2$. ¿Existe el límite doble de f en el $(0, 0)$? Justificar la respuesta.
- b) Obtener, si existen, las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$: $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$.
- c) Obtener $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$.

Definición de derivadas parciales en un punto

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

Solución.

a)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^2 + m^2 x^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x = y^2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y^6}{y^4 + y^2} = 0$$

$$\frac{2x^3}{x^2 + y^2} - 0 = \frac{2r^3 \cos^3(\alpha)}{r^2} = 2r \cos^3(\alpha) = h(r) \cdot g(\alpha) \quad / \quad h(r) = 2r \text{ y } g(\alpha) = \cos^3(\alpha)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = 0 \quad ; \quad g \text{ es acotada ya que } |\cos^3(\alpha)| \leq 1$$

El límite doble de f en el $(0, 0)$ existe y es igual a 0.

b) $f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 0}{h} = 2$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$c) \text{ Si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f_x(x, y) = \frac{6x^2(x^2 + y^2) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow f_x(1, 1) = 2$$

$$\text{Si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f_y(x, y) = \frac{-2x^3 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow f_y(1, 1) = -1$$

4.3) Sea T el conjunto de puntos del plano pertenecientes al triángulo de vértices $(0, 0)$, $(6, 0)$ y $(0, 6)$.

a) Escribir las condiciones que ha de verificar un punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ para pertenecer al conjunto T .

b) Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y) = 4 + 4x + 4y - x^2 - y^2$ definida en T .

Solución.

a)

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, y \leq 6 - x\}$$

b)

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x = 4 - 2y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (2, 2) \in T$$

Los restantes puntos críticos hay que buscarlos entre los puntos frontera del conjunto T ; analizamos por separado cada uno de los tres segmentos que componen dicha frontera y restringimos la función a cada uno de esos segmentos. Se obtienen así tres funciones de una variable, definida cada una de ellas en un intervalo cerrado de la recta real.

$$\text{Sea } g(x) = f(x, 0) = 4 + 4x - x^2, \quad x \in [0, 6] \Rightarrow g'(x) = 4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$(0, 0), (2, 0), (6, 0) \text{ puntos críticos}$$

$$\text{Sea } g(y) = f(0, y) = 4 + 4y - y^2, \quad y \in [0, 6] \Rightarrow g'(y) = 4 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

$$(0, 2), (0, 6) \text{ puntos críticos}$$

$$\text{Sea } g(x) = f(x, 6 - x) = 4 + 4x + 4(6 - x) - x^2 - (6 - x)^2 \Rightarrow g'(x) = 12 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$(3, 3) \text{ punto crítico}$$

$$f(2, 2) = 12; \quad f(0, 0) = 4; \quad f(2, 0) = f(0, 2) = 8; \quad f(6, 0) = f(0, 6) = -8; \quad f(3, 3) = 10$$

El máximo absoluto es 12 y el mínimo absoluto es -8.

4.4) Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$ en el cuadrado

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 6\} = [1, 6] \times [1, 6]$$

Solución

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\sin(y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right)$$

Los restantes puntos críticos son: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 1\right), (1, 1), (6, 1), \left(\frac{\pi}{2}, 6\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 6\right)$
 $(1, 6), (6, 6), (1, \pi), (6, \pi)$

El máximo absoluto es: $f\left(\frac{\pi}{2}, 6\right) \approx 1.96$; el mínimo es: $f\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = -2$