

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
TEMA 4. ACTIVIDAD 4.1

4.1) Calcular, si existen, los límites dobles en el $(0, 0)$ de las siguientes funciones. En todos ellos se ha de comenzar calculando los límites direccionales a través de rectas y, si es necesario, se ha de calcular también algún límite direccional a través de una curva.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \text{c) } f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \\ \text{d) } f(x, y) &= \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} \quad ; \quad \text{e) } f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; \quad \text{f) } f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Solución.

a)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

Concluimos que el límite doble en el $(0, 0)$ no existe ya que los límites direccionales a través de rectas son distintos, al depender de la pendiente de la recta.

b)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xmx}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Concluimos que el límite doble en el $(0, 0)$ no existe ya que los límites direccionales a través de rectas son distintos, al depender de la pendiente de la recta.

c)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xm^2 x^2}{x^2 + m^4 x^4} = 0$$

Por tanto, el límite doble en el $(0, 0)$, si existe, vale 0. Probemos con alguna curva

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x = y^2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$$

Concluimos que el límite doble en el $(0, 0)$ no existe ya que no todos los límites direccionales son iguales.

d)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m^3 x^3}{x^4 + m^6 x^6} = 0$$

Por tanto, el límite doble en el $(0, 0)$, si existe, vale 0. Probemos con alguna curva

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x = y^2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4 y^3}{y^8 + y^6} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = x^2}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 x^6}{x^4 + x^{12}} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x^2 = y^3}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3 y^3}{y^6 + y^6} = \frac{1}{2}$$

Concluimos que el límite doble en el $(0, 0)$ no existe ya que no todos los límites direccionales son iguales.

e)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = 0$$

Por tanto, el límite doble en el $(0, 0)$, si existe, vale 0. Si probamos con algunas curvas vemos que el límite sigue dando cero. Intentemos demostrar que el límite doble es 0.

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 = \frac{r \cos(\alpha) r \sin(\alpha)}{\sqrt{r^2 \cos^2(\alpha) + r^2 \sin^2(\alpha)}} = r \cos(\alpha) \sin(\alpha) = h(r) \cdot g(\alpha)$$

$$\text{siendo } h(r) = r \quad y \quad g(\alpha) = \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = 0 \quad ; \quad g \text{ es acotada ya que } |\cos(\alpha) \sin(\alpha)| \leq 1$$

Efectivamente, el límite doble en el $(0, 0)$ es igual a 0.

f) El límite doble en el $(0, 0)$ es igual a 0. Es suficiente comprobarlo con la función $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ ya que

$$|\sin(x^2 y^2)| \leq x^2 y^2$$

