Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

CALCULO
GRADO EN INGEN. INFORM. DEL SOFTWARE. 12-13
TEMA 3. ACTIVIDADES 3.8 A 3.12

3.8) Estudiar el carácter de las series siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(n)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+4}{n^3+n}$

Solución.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergente (serie armónica)

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{(n+2)(n^2+1)}=0<1$ convergente (criterio del cociente)

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1/\log(n)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log(n)}=\infty$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente

Por tanto, la serie dada es divergente (criterio de comparación en el límite)

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}\neq 0$; divergente (no verifica la condición necesaria de convergencia)

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n+4}{n^3+n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+4n^2}{n^3+n}=5$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente

Por tanto, la serie dada es convergente (criterio de comparación en el límite).

3.9) Sea $a\in R$. Estudiar el carácter de la siguiente serie para los distintos valores de "a" y calcular su suma en los casos en que sea convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n+3}}{(a+1)^n}$$

Solución.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+3}}{(a+1)^n} = a^3.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \text{ convergente } \Leftrightarrow \left|\frac{a}{a+1}\right| < 1 \Leftrightarrow a > -1/2$$

$$S = a^3 \frac{\frac{a}{a+1}}{1-\frac{a}{a+1}} = a^4$$

$$\text{oscilante } \Leftrightarrow \frac{a}{a+1} = -1 \Leftrightarrow a = -1/2$$

$$\text{divergente } \Leftrightarrow \quad a < -1/2 \; (a \neq -1)$$

3.10) Razonar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si la serie de término general a_n es convergente, entonces la serie de término general $n.a_n$ también es convergente.

b) La serie siguiente es convergente y también absolutamente convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$$

Solución.

a) Falso. La serie de término general $\frac{1}{n^2}$ es convergente y la serie de término general $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ es divergente.

b) Cierto.

Es absolutamente convergente ya que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{8}{9}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n$ es convergente (serie geométrica y $8/9 \in (-1,1)$). Al ser absolutamente convergente también es convergente.

c) Falso

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1/3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

3.11) Comprobar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\log(n)}$ es condicionalmente convergente.

Solución.

$\left\{\dfrac{1}{\log(n)}\right\}$ es una sucesión decreciente de números positivos y además convergente a cero. Por tanto, la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log(n)}$ es convergente (criterio de Leibniz). La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(n)}$ no es convergente(ver ejercicio 3.8 c) ; así pues, la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log(n)}$ no es absolutamente convergente.

3.12) Calcular la suma de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Solución.

a) Es una serie aritmético-geométrica. Es convergente ya que $1/2\in(-1,1)$.

$$S=\frac{3}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{11}{2^3}+\ .\ .\ .+\frac{4n-5}{2^{n-1}}+\frac{4n-1}{2^n}+\ .\ .\ .$$

$$\frac{1}{2}S=\qquad \frac{3}{2^2}+\frac{7}{2^3}\ +\ \ .\ \ .\ \ .\ \ +\frac{4n-5}{2^n}+\ldots$$

$$S-\frac{1}{2}S=\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{4}{2^3}\ +\ .\ \ .\ \ .\qquad +\frac{4}{2^n}+\ldots\quad =\frac{3}{2}+4\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}=\frac{1/2}{1-(1/2)}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}S=\frac{3}{2}+\frac{4}{2}=\frac{7}{2}\qquad\Rightarrow S=7$$

b) Es una serie telescópica

$$\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1-\frac{1}{n}\right)=\log\left(\frac{n+1}{n}\right)-\log\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$S_n=\log\left(\frac{3}{2}\right)-\log 2+\log\left(\frac{4}{3}\right)-\log\left(\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{5}{4}\right)-\log\left(\frac{4}{3}\right)+\ .\ .\ .+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)-\log\left(\frac{n}{n-1}\right)=$$

$$=\log\left(\frac{n+1}{n}\right)-\log(2)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = -\log(2)$$